DINAMOMETRI

MANUALI HOEPLI

ING. E. N. CAMPAZZI

DINAMOMETRI

Apparecchi per le misure delle forze e del lavoro da questi eseguito mentre agiscono lungo determinate traiettorie.

CON 132 INCISIONI

ULRICO HOEPLI

EDITORE LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

—

1907

ALLA MEMORIA DELL'ADORATO PADRE

ING. MASSIMILIANO

CHE FU TOLTO TROPPO PRESTO ALL'AMORE DEI SUOI

IN SEGNO D'ETERNO RICORDO

QUESTO PICCOLO LAVORO

DEDICO

INDICE

PARTE PRIMA.

Studio dei meccanismi semplici di un dinamometro.

PARTE SECONDA.

Descrizione dei principali dinamometri.

PARTE TERZA.

Taratura dei dinamometri.

PARTE QUARTA.

Determinazione della forza media — del lavoro — della potenza.

PARTE QUINTA.

Nota.

Contatore cronografico — Tachimetro Dinamometro d'inerzia.

AL LETTORE

La determinazione delle forze e del lavoro assorbito da una data macchina od attrezzo, o da un assieme di macchine od attrezzi, è di massima importanza, specie quando si debba o si voglia trarre da una determinata quantità di forza il massimo profitto. Tale determinazione si può fare in molti modi, ciascuno dei quali è adatto più che un altro ad una categoria di macchine od attrezzi. Lasciando, per ora, di esaminare nella sua generalità i metodi e la esattezza loro nell'applicazione ad un dato scopo, vediamo di esaminare dapprima gli apparecchi adatti a tale determinazione. Fra questi, senza procedere ad una enumerazione più o meno completa, ne esiste una serie, non molto nota, e che può rendere utilissimi servigi; intendo i « DINAMOMETRI » *nelle sue più svariate forme d'applicazione. È di questi che, nel presente manualetto, intendiamo darne relazione e raccoglierne le principali sue forme ed i principii su cui sono fondati; trarne da questo semplice studio ed i metodi di correzione e tutte quelle altre indicazioni che possano servire alla scelta del migliore tipo*

adatto ad una speciale determinazione. Da ultimo è accennato al metodo generale e razionale per la determinazione dei principali elementi della meccanica, cioè velocità, accelerazione, forza; ciò nel senso più generico.

Nel raggruppare in un unico manualetto quanto più interessa gli istrumenti di misura « DINAMOMETRI » *ho cercato di esaminare dapprima separatamente le singole parti, indi mostrare come, nei principali tipi già costruiti, queste siano state riunite, col principale scopo che qualche cultore di tali apparecchi potesse aver modo d'intravedere una migliore soluzione e dare agli studiosi un istrumento più perfetto degli attuali.*

Riconosco che tale idea non è facile, ma il tentarlo mi pare sempre lodevole.

In questo lavoretto, che dovrebbe essere l'inizio di una serie, avente lo scopo di raggruppare la maggior parte degli istrumenti di misura, temo d'aver raggiunto lo scopo propostomi; ma, se non altro, avrò mostrato buona intenzione.

Ed ora che ci siamo intesi, accoglierò con animo sereno qualunque giudizio che sarà dato sul modesto lavoretto.

Ing. E. N. CAMPAZZI.

PREMESSA

1. *Generalità.* — In linguaggio comune dicesi *forza* la causa che altera lo stato di quiete o di moto di un corpo, e che si manifesta sotto le varie forme di energia. Questa alterazione dello stato di un corpo dovuta ad un sistema di forze o ad una sola, produce nel corpo stesso delle deformazioni di grado diverso a seconda della intensità delle forze stesse e della qualità e forma della materia di cui il corpo è composto; deformazioni che stanno in un dato rapporto colle forze agenti. Un istrumento che debba servire per la misura delle forze può valutare la intensità delle stesse forze dalle deformazioni che esse fanno subire ad una parte di esso, purchè tali deformazioni soddisfino alle seguenti condizioni:

1°) Siano determinabili facilmente;

2°) Divengano nulle al cessare della azione delle forze;

3°) La successione dei valori delle deformazioni stabilisca una legge semplice colla intensità delle forze.

La seconda condizione stabilisce esattamente i limiti entro i quali devono essere comprese le in-

tensità delle forze che agiscono sul corpo, le di cui deformazioni devono servire per misurare le forze stesse; mentre la prima richiede una conveniente semplicità dell'istrumento ben inteso non disgiunto dall'esattezza delle indicazioni che esso deve fornire.

Non tutti i corpi, anche suscettibili di deformazioni sensibili, soddisfano però alla seconda condizione, e si dà la preferenza a quel corpo che, sopportando deformazioni convenientemente valutabili ritorna nel primitivo suo stato di posizione e di forma, al cessare delle forze che l'hanno deformato, forze che non devono altrepassare il limite nettamente segnato dall'esperienza. Vi è dunque un limite, che deve essere precisato con esattezza, ciò che si avrà tracciando la curva, riferita a due assi ortogonali x ed y, la quale rappresenta la variazione delle deformazioni (ordinate) col variare dell'intensità (ascisse).

Per ogni caso avremo una curva diversa, la quale stabilisce entro quali limiti deve agire la forza, perchè la deformazione subita dal corpo soddisfi alle tre precedenti condizioni.

2. *Corpo aeriforme.* — Supponiamo, ad esempio, di sottoporre a compressione un volume V d'aria, contenuto in un cilindro, mediante uno stantuffo fatto funzionare dall'esterno. Evidentemente saremo in presenza di un manometro ad aria compressa; se immagineremo inoltre che fra stantuffo ed aria vi sia interposta una certa quantità di mercurio, per la tenuta perfetta, e per altre cause, che ora è inutile rammentare, la legge di Boyle:

$$P\,V = \text{costante}$$

per una stessa temperatura t, ci fornirà per ogni valore della pressione P quello di V e quindi la curva A B (fig. 1). Nessun tratto di tale curva soddisfa alla terza condizione. Tuttavia, considerando un volume di rotazione, e non uno qualunque, dipendente quindi da due sole dimensioni, è sempre possibile trovare la legge di variazione di una di esse, affinchè l'altra vari linearmente, o con quella legge speciale che si vuole.

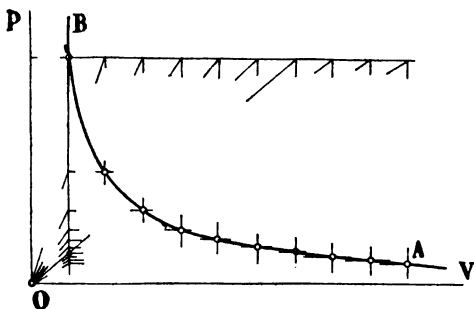



Fig. 1.

Ma noi dovremo limitare le nostre ricerche ai soli corpi solidi, perchè gli strumenti che intendiamo prendere in esame, già effettivamente costrutti, hanno utilizzato solo le deformazioni dei corpi solidi, come quelli che soddisfan meglio al maggior numero di esigenze di tali istrumenti. I corpi liquidi presentano inoltre deformazioni troppo piccole per valori anche elevati delle forze da misurare.

3. *Corpo solido.* — Sottoponiamo ora alla trazione un cilindro di ferro e rappresentiamo la variazione della sua lunghezza al variare del carico: avremo il diagramma rappresentato dalla fig. 2.

In esse si distinguono nettamente tre periodi:

1°) Un primo periodo, detto *elastico*, durante il quale gli allungamenti e la forza si mantengono proporzionali con grandissima approssimazione; periodo rappresentato dal tratto di retta *O A:*

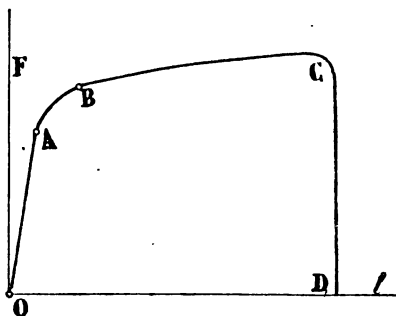



Fig. 2.

2°) Un periodo di *grandi deformazioni,* durante il quale, gli allungamenti e la forza non mantengono costante il loro rapporto, ma gli allungamenti crescono molto più rapidamente della forza, periodo rappresentato graficamente dalla curva *A B;* oltrepassato detto punto *B* il rapporto fra allungamenti e forze cresce oltre ogni misura in modo che le molecole metalliche cominciano a fluire a guisa di liquido:

3°) Un periodo di *rottura*, durante il quale ad un allungamento locale del cilindro, segue il distacco immediato fra le molecole di due sezioni adiacenti.

Poichè il corpo colle sue deformazioni, possa determinare una legge semplice coll'intensità delle forze, è naturale che non deve essere assoggettato a forze maggiori di quelle di cui il corpo è assoggettato durante il periodo *O A*. Di più è conveniente non avvicinare troppo al limite segnato dal punto *A* il valore dell'intensità delle forze stesse per evitare il pericolo di entrare anche per poco nel periodo *A B*, nel quale, al cessare delle forze, il corpo non riprende più esattamente la forma primitiva.

4. *Dinamometro*. — Un istrumento che, usufruendo delle deformazioni di un corpo, serva a misurare le forze che hanno determinato le sue deformazioni dicesi *dinamometro* da due voci greche che significano forza e misura.

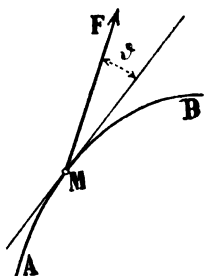
I corpi di cui abbiamo esaminato in precedenza le leggi, deformandosi il primo colla compressione, il secondo colla trazione, potrebbero ambedue servire al caso. Tuttavia per la semplicità degli apparecchi si è preferito usare dei materiali solidi e tra questi quelli che hanno maggiore ampiezza del periodo *O A* (fig. 2). Onde nei dinamometri ordinariamente adottati e costruiti si fa uso esclusivamente di materiale d'acciaio, e precisamente di molle la cui forma varia da tipo a tipo.

5. *Lavoro di una forza*. — In pratica le forze si adoperano per vincere delle resistenze, le quali

non basta siano equilibrate, ma debbono essere, vinte lungo un certo spazio; per conseguenza dobbiamo considerare oltre all' intensità della forza lo spazio lungo il quale la forza agisce.

Nel caso più generale si chiama *lavoro elementare* eseguito dalla forza F nel passaggio da una posizione qualunque (M della fig. 3) alla posizione infinitamente vicina, il prodotto:

Fig. 3.

$$F \cos \theta \, ds$$

e *lavoro totale* eseguito dalla forza F nel passaggio da A a B lungo la traiettoria $A\,B$, la somma dei lavori parziali, data dalla sommatoria od integrale dei lavori elementari.

Indicando con L il lavoro totale; avremo:

$$L = \int_A^B F \cos \theta \, ds$$

dove $\cos \theta \, ds$ rappresenta la proiezione dell'arco infinitesimo di traiettoria sulla linea d'azione della forza.

Nel caso che F conservi costante la direzione e la grandezza, indicando con σ la proiezione della traiettoria $A\ B$ sulla direzione della forza, avremo:

$$L = F \sigma$$

L'istrumento che misura la quantità di lavoro di una forza lungo un dato spazio dicesi *ergometro*. E poichè il lavoro è il prodotto di due termini, spazio e forza, ne segue che un ergometro è un semplice dinamometro con tale disposizione da poter tener conto dell'elemento spazio. È bene però e praticamente si vuole che le due registrazioni avvengano non solo simultaneamente, ma in modo che risulti o mediante una rappresentazione grafica o mediante un numero unico, il prodotto dei due elementi F ed s, indicando con s lo spazio lungo il quale ha agito F.

Gli istrumenti che danno la rappresentazione grafica del lavoro, mediante un diagramma ortogonale o polare, chiamansi più particolarmente *dinamometrografi* o *dinamometri registratori* mentre gli istrumenti che forniscono il lavoro col mezzo di un numero unico, diconsi *ergometri*.

6. *Forza media*. — La misura delle forze si ottiene, come abbiamo detto, con i dinamometri. Occorre però osservare che la forza per essere determinata con questi istrumenti deve essere costante, il che raramente avviene quando la forza è usata per vincere una resistenza. In tal caso conviene sostituire al dinamometro un dinamometrofago od un ergometro per ottenere il lavoro L della forza continuamente variabile, che indicheremo con F_x lungo lo spazio s e dedurne poi il valore:

$$F_m = \frac{L}{s}$$

di quella forza media fittizia F_m che mantenendosi costante fornirebbe lo stesso lavoro L lungo lo stesso spazio s.

I dinamometri quindi sono i più adatti per la misura delle forze non impiegate a vincere delle resistenze variabili compiano esse un lavoro o no; mentre i dinamometrografi ed ergometri invece sono indispensabili per la misura delle forze variabili di intensità ad ogni istante.

Consideriamo un dinamometro in azione. La forza agente sulla molla deve percorrere un certo spazio per generare nella molla stessa quella reazione che gli è pari d'intensità; indi mantenendo tale equilibrio, percorre uno spazio lungo il quale eseguisce un lavoro. Gli apparecchi che registrano il valore dell'intensità della forza necessaria per mantenere l'equilibrio con un'altra, diconsi *bilancie*, mentre diconsi *dinamometri propriamente detti*, se la forza percorre uno spazio oltre al necessario per ottenere il primo equilibrio. Nei dinamometri quindi occorre distinguere lo spazio in due parti: una prima, parte piccolissima rispetto alla seconda, necessaria per ottenere l'equilibrio delle forze, potenza e resistenza, come nelle bilancie; una seconda, che si inizia appena ottenuto l'equilibrio predetto, la quale determina lo spazio lungo il quale la forza eseguisce un lavoro, pure mantenendosi, come è ovvio, l'equilibrio ottenuto nella prima parte.

7. *Classificazione degli istrumenti di misura detti dinamometri.* — La formula:

$$L = \int_A^B F \cos \theta \, ds$$

nel valutare e misurare il lavoro tiene conto della forza rispetto alla direzione della traiettoria percorsa dal suo punto di applicazione. Per semplificare i meccanismi necessari a tener conto di tale elemento, si costruiscono gli apparecchi in modo che la forza da essi misurata unitamente al lavoro eseguito, segua la traiettoria percorsa dal punto di applicazione della forza stessa.

Tenendo conto delle traiettorie più comunemente usate nelle applicazioni della meccanica, avremo dinamometri, dinamometrografi ed ergometri tanto di trazione che di rotazione. D'ora innanzi indicheremo col nome di dinamometro un apparecchio generico per la misura delle forze e del lavoro, ed aggiungeremo l'appellativo semplice ai dinamometri propriamente detti, quando sia necessario.

Avremo quindi la seguente classificazione:

DINAMOMETRI di	trazione	semplici o dinamometri di trazione
		registratori o dinamometrografi di trazione
		integratori od ergometri di trazione
	rotazione	semplici o dinamometri di rotazione
		registratori o dinamometrografi di rotazione
		integratori od ergometri di rotazione

In ogni tipo si hanno due parti perfettamente distinte:

1°) *Organo principale* che fornisce deformazioni proporzionali all'intensità della forza.

2°) *Meccanismo indicatore* che segna in, una

conveniente scala il valore fornito dall'organo principale.

Nei dinamometrografi e negli ergometri si ha inoltre un *meccanismo registratore* che appunto registra automaticamente le indicazioni fornite dall'organo principale ed indicate dal meccanismo indicatore.

Faremo precedere alla rassegna delle singole categorie già classificate di questi istrumenti, un esame delle singole parti principali di essi. Ben inteso che in questa prima parte non scenderemo a particolari; nella seconda vedremo l'applicazione di tali meccanismi.

PARTE PRIMA.

STUDIO DEI MECCANISMI SEMPLICI di un DINAMOMETRO

§ 1. — **Organo principale.**

8. *Molla piana.* — Abbiamo già visto che la parte principale ed essenziale di un dinamometro è la molla. Abbiamo visto inoltre di che materiale debba essere costruito, ma non ne abbiamo determinato la forma e le dimensioni.

Consideriamo un solido prismatico di sezione uniforme incastrasto ad una estremità e caricato

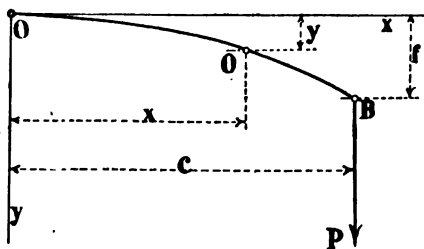



Fig. 4.

dall'altro estremo libero, di un carico la cui linea d'azione sia normale all'asse primitivo del solido (fig. 4).

Indichiamo con:

P — la forza che sollecita la molla nel suo estremo B in direzione parallela all'asse y;

c — l'ascissa dell'estremo B della molla;

f — la freccia di incurvamento dovuta alla forza (carico) P, per cui l'estremo del solido abbia assunto la posizione B;

x — l'ascissa d'un punto O qualunque dell'asse della molla;

y — lo spostamento del punto O nel piano di sollecitazione;

ρ — il raggio di curvatura dell'asse corrispondente al carico P;

x_1, y_1, ρ_1 — le notazioni analoghe alle precedenti ma corrispondenti ad un carico P_1, trascurando il peso uniformemente distribuito dalla molla, poichè esso è minimo in confronto del carico, avremo:

$$E\, I\left(\pm\frac{1}{\rho_1}\mp\frac{1}{\rho}\right)=M$$

Da cui, essendo:

$$\rho_1=\frac{\left[1\pm\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}$$

e trascurando $\frac{d\,y}{d\,x}$ di fronte all'unità perchè la tangente trigonrometra $\frac{d\,y}{d\,x}$ è trascurabile, essendo ρ

grande in confronto alle dimensioni della molla, avremo:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \pm \frac{1}{\rho} + \frac{M}{E\,I};$$

la quale diventa:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{E\,I}$$

nel caso che si consideri la molla primitivamente ad asse rettilineo poichè in tal caso si ha:

$$\rho = \infty$$

$$\frac{1}{\rho} = 0\,.$$

Nel caso attuale il momento flettente M generato dalla forza P agisce col braccio di leva $(c - x)$, per cui si ha:

$$E\,I \frac{d^2 y}{d x^2} = P\,(c - x)$$

Integrando successivamente due volte si ha:

$$y = \frac{P}{E\,I}\left(\frac{c\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

9. *Freccia della molla sotto l'azione di una forza* P. — Dalla formula precedente per $x = c$ avremo lo spostamento provocato all'estremo della

molla dalla forza P, ossia la freccia f della molla sotto il carico P; avremo cioè:

$$f = \frac{P}{E\,I}\,\frac{c^3}{3}.$$

La formula contiene implicitamente la sezione delle lame formanti le molle poichè al determinatore appare il momento d'inerzia I che dipende dalle dimensioni della sezione e della sua disposizione rispetto alla linea d'azione della forza, cioè rispetto al piano di sollecitazione.

10. *Molla a sezione rettangolare.* — Consideriamo una molla di sezione rettangolare (fig. 5)

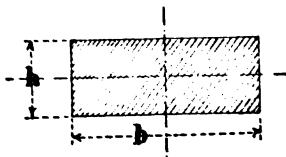



Fig. 5.

di dimensioni b ed h e cerchiamone le dimensioni reali per una forza massima di P chilogrammi.

Pel rettangolo si ha:

$$I = \frac{1}{12}\,b\,h^3$$

che sostituito nella formula fornisce:

$$b\,h^3 = 4\,\frac{c}{E}\,\frac{P}{f}.$$

Poniamo:

$$\frac{b}{h} = \alpha$$

e quindi:

$$b\,h^3 = \alpha\,h^4$$

ed uguagliamo i due valori di $b\,h^3$; avremo:

$$\alpha\,h^4 = 4\,\frac{c}{E}\,\frac{P}{f}\,.$$

Da cui:

$$h = \sqrt[4]{\frac{4}{\alpha}\,\frac{c}{E}\,\frac{P}{f}}$$

11. *Disposizione delle molle usate dal Poncelet nel suo dinamometro.* — Colla formula precedente nota P, assegnato i valori di α ed f la molla è completamente determinata.

Se immaginiamo due molle formate di quattro solidi eguali al precedente, riuniti a due a due per l'estremo incastrato, e collegate all'estremità opposta da due tiranti e cimentate nei loro punti di mezzo da una forza $2\,P$ (fig. 6), avremo una freccia $2f$, giacchè ci troviamo nelle condizioni sopra considerate. Una tale disposizione è stata usata dal Poncelet, adottando una sezione rettangolare di dimensioni costanti b ed h.

Dalla formula ultima riavendosi:

$$f = \frac{4}{\alpha} \frac{c}{E} \frac{P}{h^4}$$

si deduce facilmente che per aver grandi valori di f e non usare conseguentemente il meccanismo

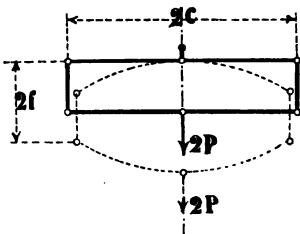



Fig. 6.

moltiplicatore è necessario aumentare di molto la lunghezza rendendo l'apparecchio pesante.

12. *Come varia il carico di sicurezza nelle varie sezioni di una molla.* — Consideriamo ora le varie sezioni di una molla a partire dall'incastro fino alla sezione in cui agisce la forza. Per una sezione qualunque essendo il momento flettente dato dalla formula:

$$M = P(c - x)$$

avremo il massimo momento per $x = o$, ed il momento minimo per $x = c$ (fig. 4) corrispondentemente alla sezione d'incastro ed alla sezione della

molla tagliata dalla linea d'azione della forza. Per la sicurezza il solido deve quindi essere calcolato con l'appropriato carico di sicurezza nella sezione maggiormente cimentata. La molla precedente, usata dal Poncelet, avendo una sezione costante in ogni punto della sua lunghezza, ed uguale a quella fornita del carico di sicurezza nella sezione più cimentata (sezione d'incastro) mostra chiaramente di avere sezioni tanto maggiori del neces-

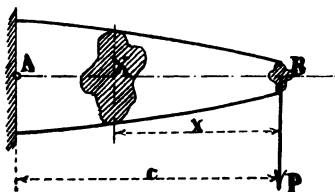



Fig. 7.

sario quanto più la sezione considerata dista dalla sezione d'incastro. In altri termini la sezione mantenendosi costante ed il momento flettente diminuendo, il carico unitario di sicurezza diminuisce. In tal modo la materia costituente una molla non è cimentata ugualmente, in tutte le sezioni.

Da ciò ne segue che per la buona utilizzazione del materiale, la sezione deve essere variabile con legge tale da ottenersi per ognuna sempre lo stesso carico di sicurezza.

Determinazione delle molle in cui ogni sezione è assoggettata allo stesso carico di sicurezza. — Immaginiamo che il solido costituente la molla abbia sezioni omotetiche, di forma qualunque (fig. 7).

Per la sezione d'incastro abbiamo:

$$M_A = P_c$$

Indicando con:

y_A — la distanza della fibra più lontana dell'asse neutro, misurato nel piano di sollecitazione se trattasi di materiale avente eguale carico di sicurezza, sia alla tensione, che alla compressione, o la distanza della fibra più cimentata se trattasi di materiale avente diverso carico di sicurezza alla tensione o compressione:

k — il carico di sicurezza del materiale adoperato; si ha:

$$M_A = k \frac{I_A}{y_A};$$

e quindi:

$$P_c = k \frac{I_A}{y_A};$$

da cui:

$$k = P_c \frac{y_A}{I_A}.$$

Per una sezione qualunque distante x dalla sezione d'incastro si ha analogamente:

$$k = P_x \frac{y_x}{I_x}$$

Perchè nelle diverse sezioni la materia sopporti lo stesso carico di sicurezza si dovranno avere momenti di resistenza tali da soddisfare all'eguaglianza di due valori dalle espressioni precedenti; per cui deve essere:

$$\frac{P_c\, y_A}{I_A} = \frac{P_x\, y_x}{I_x}\,.$$

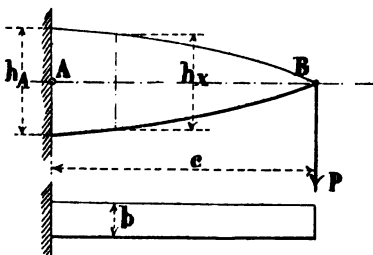



Fig. 8.

Per una molla di forma rettangolare di lati b, c (fig. 8), si ha successivamente:

$$I_A = \frac{1}{12}\, b\, h_A^3$$

$$I_x = \frac{1}{12}\, b\, h_x^3$$

$$\frac{c\,\frac{h_A}{2}\,P}{\frac{1}{12}\,b\,h_A^3} = \frac{x\,\frac{h_x}{2}\,P}{\frac{1}{12}\,b\,h_x^3}$$

$$\frac{c}{h_A^2} = \frac{x}{h_x^2}$$

$$\frac{x}{c} = \frac{h_x^2}{h_A^2}$$

$$h_x^2 = \frac{h_A^2}{c} x$$

equazione d'una parabola ordinaria della forma:

$$y^2 = 2 p x$$

13. *Molla adoperata dal Morin, a sezione longitudinale parabolica.* — La molla del dinamometro Morin è precisamente foggiata con la forma determinata al paragrafo precedente, cioè a sezione rettangolare di larghezza b costante e spessore variabile con legge parabolica. È da osservarsi inoltre che sono parabolici ambedue i due profili esterni della molla perchè nei calcoli abbiamo considerato rettilineo l'asse neutro.

14. *Sezione in cui agisce la forza. Sforzo di taglio.* — Nella sezione in cui agisce la forza, cioè per $x = o$ la formula fornisce:

$$h_x = o\,;$$

quindi la sezione dovrebbe avere, nel punto in cui agisce la forza, un'altezza nulla. Ma d'altra parte lo sforzo di taglio è diventato massimo, cioè eguale a P; per cui la sezione considerata deve essere tale da poter sopportare tale sforzo di taglio. Indicando perciò con:

h_B — l'altezza necessaria all'estremo della molla; dovrà essere:

$$b\, h_B \frac{4}{5} k = P\,;$$

da cui:

$$h_B = \frac{5}{4} \frac{P}{bk}.$$

Allo stesso modo si dovrebbero calcolare le altre sezioni fino a quelle per cui si ha un'altezza eguale a quella fornita dal momento flettente; ma sapendo che tale sforzo varia linearmente, trattandosi di un sol carico concentrato, non avremo

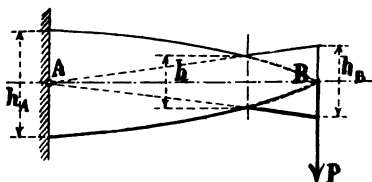



Fig. 9.

che da unire, le estremità del segmento h_B con il punto di mezzo della sezione d'incastro di altezza h_A. La fig. 9 mostra i profili teorici di una di queste molle; praticamente però usasi foggiare la estremità della molla di un'altezza uniforme h_B fino al punto in cui il profilo parabolico assume la stessa altezza h_B.

15. *Variazione del valore della freccia al variare dell' intensità dela forza.* — Riprendendo la formola:

$$f = \frac{4}{\alpha} \frac{c}{E} \frac{P}{h^4}$$

si vede chiaramente che la deformazione dipende dalla distanza c, la quale, non rimanendo costante al variare del carico, fa variare pure la freccia f; vedremo in seguito l'importanza di questo fatto.

Molla usata dalla casa Sack. — La molla di uno dei tipi di dinamometro costruito dalla casa

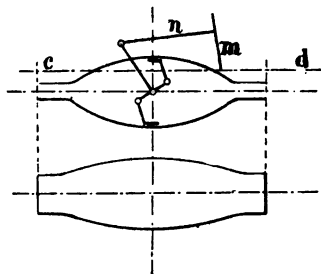



Fig. 10.

Sack non è foggiata di larghezza b costante ma variabile come si vede dalla qui unita figura (fig. 10).

Anche in questa le formule pel calcolo dello spessore h nelle diverse sezioni restano le stesse; solamente l'altezza anzichè variare con legge parabolica varierà con legge dipendente dalla legge con cui varrà il profitto scelto per la larghezza.

16. *Molle a spirale.* — Dalla formula:

$$f = \frac{4}{\alpha} \frac{c}{E} \frac{P}{h^4}$$

si osserva pure che la deformazione aumenta coll'aumentare della lunghezza; e poichè è bene

avere massime deformazioni compatibili con un minimo spazio occupato, sarà preferibile dare alla molla una forma raccolta, tale però che le deformazioni siano legate al carico da formule semplici. La forma a spirale, sia cilindrica che conica, si presta egregiamente sotto questo punto di vista.

17. *Molla a spirale conica.* — Consideriamo un solido cilindrico di sezione, per ora qualunque, di lunghezza l disposto a spirale conica (fig. 11); R_m ed R_0 siano i raggi maggiore e minore della spirale.

Una sezione qualunque di questo solido, il cui baricentro dista di s dall'origine A, distanza misurata lungo l'asse del solido, riferiamola a tre assi ortogonali, di cui:

x — disposto tangenzialmente all'asse dello spirale:

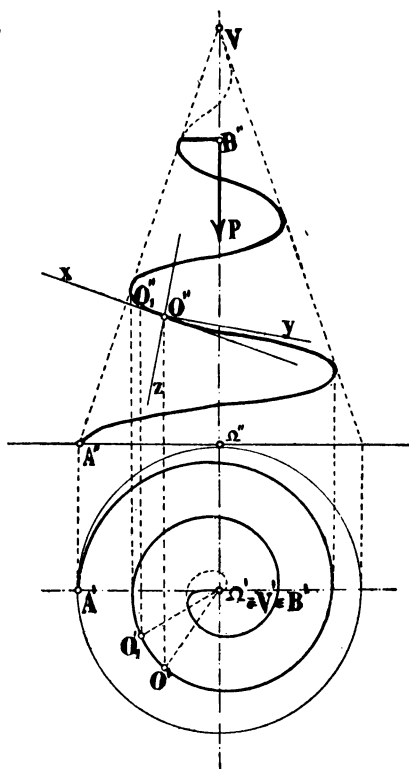
y e z — disposti nel piano della sezione normale all'asse e disposti secondo gli assi centrali d'inerzia della sezione stessa.

Consideriamo, per ora, un solido omogeneo di sezione circolare di raggio r, ed assumiamo l'asse z tangente alla superficie del cono che racchiude la spirale e l'asse y normale a z.

Scomponiamo la forza P in due componenti T ed N giacenti nel piano y z. La N portata nel baricentro O genera uno sforzo di compressione

$$G = \frac{N}{\Omega} = \frac{P \operatorname{sen} \alpha}{\Omega}$$

dove Ω è il valore dell'area della sezione;

Fig. 11.

ed uno flettente:

$$N_n = N\rho = P \operatorname{sen} \alpha \, \rho,$$

che in pratica si possono trascurare per i piccoli valori di α adoperati. La T trasportata anch'essa nel baricentro O parallelamente a se stessa genera un momento flettente;

$$M_t = T\rho = P\rho \cos \alpha$$

ed uno di taglio:

$$T_o = \frac{T}{\Omega} = \frac{T \cos \alpha}{\Omega}$$

riferito all'unità di superficie. Per la stabilità alla torsione dovremo avere:

$$t = M_t \frac{r}{I}$$

$$t = P\rho \cos \alpha \frac{r}{I}$$

da cui:

$$I = P\rho \cos \alpha \frac{r}{t}$$

nella quale entrano le dimensioni della sezione.

18. *Diametro della sezione delle spire.* — Poichè ρ varia tra i valori R_m ed R_o le diverse sezioni circolari risulterebbero di raggi diversi assumendo per coefficente di sicurezza lo stesso valore. In pratica però si usa mantenere costante la sezione,

per cui si assume pel calcolo di essa il valore massimo di ρ che è R_m corrispondente alla sezione d'incastro; si avrà quindi:

$$I = P\, R_m \cos\alpha\, \frac{r}{t};$$

da cui, essendo:

$$I = \frac{\pi\, r^4}{4}$$

si ha:

$$r = \sqrt[3]{\frac{4\, [P\, R_m \cos\alpha]}{\pi\, t}}$$

od anche, chiamando d il diametro della sezione circolare del solido:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi}\,\frac{P\, R_m \cos\alpha}{t}}\,.$$

Per valori piccoli di α e per $t = 32$ chilogrammi; si ha:

$$r = \sqrt[3]{\frac{P\, R_m}{8\,\pi}}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{P\, R_m}{\pi}}$$

19. *Calcolo della freccia di deformazione.* — Poichè il solido considerato è molto lungo rispetto

alla sua sezione, nel calcolarne la freccia di flessione, ossia la deformazione, terremo conto del solo sforzo di torsione.

Rammentando che il lavoro di deformazione è dato dalla formula:

$$L = \frac{1}{2} \int_{s=o}^{s=l} \frac{Mt}{E_t I} ds$$

dove la lettera t posta al piede dei noti simboli sta ad indicare che tali simboli si riferiscono a sforzi di torsione, e che la deformazione è data dalla derivata parziale del lavoro di deformazione, avremo successivamente:

$$M_t = P \rho \cos \alpha$$

$$\frac{\delta Mt}{\delta P} = \rho \cos \alpha$$

$$f = \int_{s=o}^{s=l} \frac{Mt}{E_t I} \frac{\delta Mt}{\delta P} d s$$

$$f = \frac{P \cos \alpha}{E_t I} \int_{s=o}^{s=l} \rho^2 \cos \alpha \, ds .$$

20. *Altra espressione della freccia di deformazione.* — Trasformiamo ora l'integrale in modo che i limiti siano i valori estremi del raggio ρ. Per questo indicando con:

β — l'angolo (misurato in archi di raggio uno) formato fra la posizione iniziale e quella con-

siderata in cui il raggio vettore del cono è ρ (in figura $2\pi + \widehat{A \Omega O}$:

ds — l'elemento d'elica $O\,O'$:
$ds \cos\alpha$ — la proiezione dell'elemento ds:
h — la proiezione della distanza fra due spire:
n — il numero delle spire:

sarà:

$$\cos\alpha\, ds = \rho\, d\beta$$

e quindi la formula che dà il valore di f, diventa:

$$f = \frac{P\cos\alpha}{E_t\, I} \int_{\rho=R_o}^{\rho=R_m} \rho^3\, d\beta\,.$$

Ma:

$$\rho = R_o + \frac{\beta}{2\pi} h$$

$$d\rho = \frac{h}{2\pi} d\beta\,;$$

quindi:

$$f = \frac{P\cos\alpha}{E_t\, I} \int_{\rho=R_o}^{\rho=R_m} \rho^3 \frac{2\pi}{h} d\rho$$

$$f = \frac{P\cos\alpha}{E_t\, I} \frac{\pi}{2\,h} R_m^4 \left[2 - \left(\frac{R_o}{R_m}\right)^4\right].$$

Sostituendo al posto di I il suo valore già trovato:

$$I = P\, R_m \cos\alpha \frac{r}{t}\,:$$

avremo:

$$f = \frac{t\,R_m^3}{E_t\,r}\,\frac{\pi}{2\,h}\left[1 - \left(\frac{R_o}{R_m}\right)^4\right]$$

che diventa:

$$f = \frac{t\,R_m^2}{E_t}\,\frac{1}{r}\,\frac{\pi}{2}\left(n + \frac{R_o}{h}\right)$$

rammentando:

$$R_m = R_o + n\,h$$

e trascurando il valore $\left(\frac{R_o}{R_m}\right)^4$, perchè in pratica si fa generalmente $\frac{R_o}{R_m} < \frac{1}{3}$.

21. *Molle a spirale conica con sezioni di forma qualunque.* — Nel solido circolare considerato, le varie sezioni restano sempre piane ma non è così per le sezioni di altra forma. Tuttavia per queste useremo le stesse formule della sezione circolare modificate con opportuni coefficienti k' e k'' che tengono conto della formula della sezione e che indicheremo genericamente con Ω.

Ponendo:

$$k' \sqrt{\Omega^3} = \frac{I}{r}$$

$$I = \frac{k''\,\Omega^4}{I}$$

da cui:

$$\frac{1}{r} = \frac{k'}{k''} = \frac{I}{\sqrt{\Omega^6}};$$

si ha:

$$f = \frac{t}{E_t} R_m^2 \frac{k'}{k''} \frac{I}{\sqrt{\Omega^6}} \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{R_0}{h}\right).$$

22. *Molla a spirale conica a sezione rettangolare.* — Per la sezione rettangolare (fig. 12), sezione usata per la molla di un dinamometro costruito dalla Casa Sack, si ha:

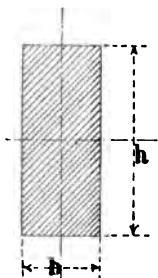



Fig. 12.

$$I = \frac{1}{12} bh^3$$

$$\Omega = bh$$

$$f = \frac{t}{E_t} R_m^2 \frac{k'}{k''} \frac{1}{12} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b^3}} \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{R_0}{h}\right)$$

nella quale per k' e k'' si assumono i valori dati dalla seguente tabella calcolati dal Saint-Venant:

per $h = b$	$k' = 0,21$	$k'' = 0,0235$
» » $= 2\,b$	» $= 0,17$	» $= 0,0240$
» » $= 5\,b$	» $= 0,13$	» $= 0,0250$
» » $= 10\,b$	» $= 0,10$	» $= 0,0260$
» » $= 20\,b$	» $= 0,07$	» $= 0,0265$
» » $= 50\,b$	» $= 0,047$	» $= 0,0270$

23. *Molla adoperata dal Bentall. Molla a spirale cilindrica.* — Nel dinamometro costruito dal Ben-

tall si ha invece una molla formata con un solido di sezione circolare di raggio costante disposto a spirale cilindrica, il calcolo della quale si ottiene con ragionamento analogo a quello della molla conica.

Indicando con:

R — il raggio del cilindro:

si ha:

$$I = P R \cos \alpha \frac{r}{t}$$

la quale per α piccolissimo diventa:

$$I = P R \frac{r}{t} ;$$

da cui:

$$P R = \frac{I t}{r} .$$

Per la sezione circolare si ha:

$$I = \frac{\pi r^4}{4} ;$$

$$r = \frac{d}{2} ;$$

$$P R = \frac{\pi r^3 t}{4} ;$$

$$P R = \frac{\pi d^3 t}{32} ;$$

la quale per $t = 32$ chilogr. al mm.[2] diventa:

$$P R = 8 \pi r^3$$

$$P R = \pi d^3$$

e quindi:

$$r = \sqrt[3]{\frac{P R^3}{8 \pi}}$$

$$d = \sqrt{\frac{P R^3}{\pi}} .$$

Consideriamo la formula:

$$f = \frac{P \cos^2 \alpha}{E_t\, t} \int_{s=0}^{s=l} \rho^2 \cos^2 ds$$

ottenuta per la molla conica, ed applichiamola al caso della molla cilindrica (fig. 13), ponendo $\rho =$ costante, e precisamente eguale al raggio della molla, che indicheremo con R; avremo:

$$f = \frac{P R^2 \cos^2 \alpha}{E_t\, t}\, l$$

dove l è la lunghezza della molla proiettata su di un piano normale all'asse della molla stessa, e quindi (fig. 14) dato dalla formula:

$$l \cos \alpha = 2 \pi n R ;$$

cioè:

$$l = \frac{2 \pi n R}{\cos \alpha} ;$$

e quindi:

$$f = \frac{R^3\, 2\pi n P \cos\alpha}{E_t I}$$

$$f = [k \cos\alpha]\, P$$

dove:

$$k = \frac{2\pi R^3 n}{E_t I}$$

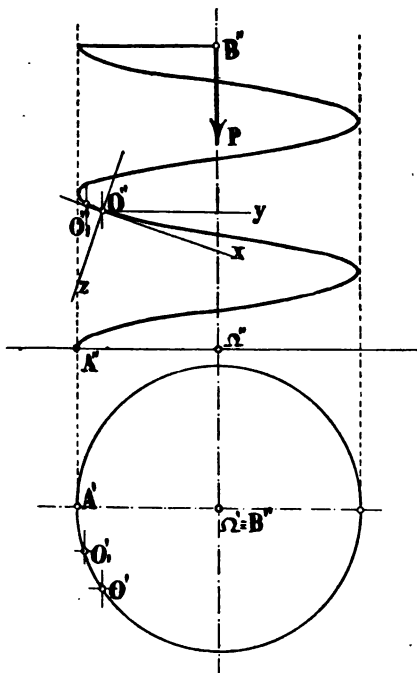



Fig. 13.

Dalla formula precedente che fornisce la deformazione della molla, sotto il carico P, osserviamo che essa deformazione è proporzionale al carico secondo il rapporto ($k \cos \alpha$). In pratica il valore di α non solo è sempre piccolissimo, e quindi il suo coseno molto prossimo all'unità, ma subisce anche variazioni sì piccolissime che si può rite-

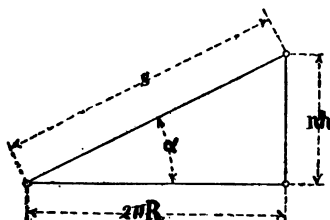



Fig. 14.

nere la deformazione f direttamente proporzionale al carico P. Inoltre usando molle in cui al crescere del carico le spire s'avvicinano, cioè deformandole per compressione, devesi rammentare che la variazione della linea trigonometrica, coseno, diventa sempre più insensibile.

Riprendendo la formula che dà la freccia di deformazione, rammentando:

$$P\,R \cos \alpha = t\,\frac{I}{r};$$

si ha:

$$f = \frac{R^2\,t}{E_t\,r}\,2\,\pi\,n$$

Fig. 15.

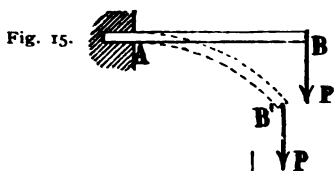



Fig. 16.

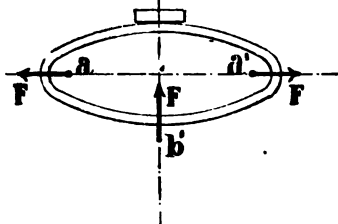
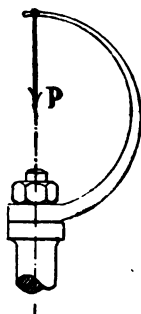



Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19.

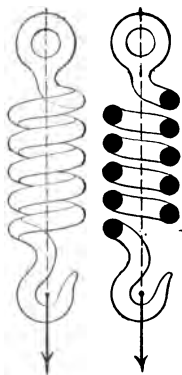
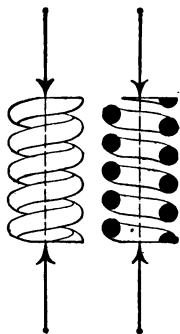



Fig. 20. Fig. 21.

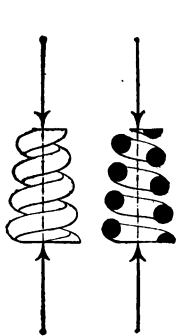
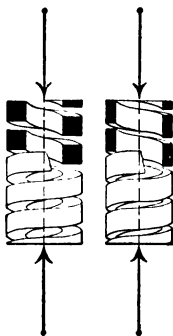
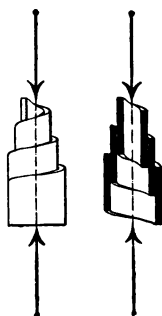



Fig. 22. Fig. 23. Fig. 24.

Questa è la formula comunemente usata per determinare la freccia d'una molla cilindrica di cui è già determinato il raggio r delle spire, il raggio R dell'asse dell'elica, ed il numero n delle spire.

24. *Forme principali di molle adoperate nei dinamometri.* — Le figure da 15 a 25, che possono

Fig. 25.

essere calcolate mediante le formule trovate rappresentano le forme principali di molle usate nei dinamometri che in appresso esamineremo. Le freccie indicano la direzione in cui agisce la forza.

§ 2. Meccanismo indicatore.

25. *Parti essenziali di un meccanismo indicatore.* — Dalla definizione di meccanismo indicatore, data a suo tempo, e dal modo con cui l'organo principale si deforma, si comprende che il meccanismo indicatore deve essere disposto in modo che le sue parti essenziali (indice e gradua-

zione) siano collegate ai due punti rigidi cogli estremi della molla. Estremi nel senso di contenere fra loro tutte e solamente quelle parti della o delle molle che vengono cimentate dal carico di cui l'apparato indicatore deve segnarne il valore.

Si comprende pure che queste due parti si devono muovere l'una in vicinanza dell'altra non solo, ma anche rappresentare in una scala nota la deviazione della molla per ogni valore della intensità della forza. La deviazione delle due parti di un meccanismo indicatore (indice e graduazione) può essere eguale a quella della molla, oppure può essere moltiplicata a seconda dei casi.

26. *Indicatore semplice.* — Una semplice graduazione disposta lungo la deformazione subita dalla molla per azione della forza da misurarsi, costituisce il più semplice indicatore. In questo semplice meccanismo indicatore la deviazione dell'indice rispetto alla graduazione è uguale alla deformazione della molla stessa. Per ogni valore dell'intensità della forza F, data la forma e le dimensioni della molla si calcola la deformazione, che è segnata con precisione da un punto estremo della molla stessa rispetto all'altro estremo e si segna il valore della deformazione su di una apposita listerella metallica (graduazione).

Questo sistema non è applicabile se non a molle la cui deformazione sia relativamente grande. In tal caso però le molle debbono avere grandi dimensioni, e, quindi, rendono l'apparecchio ingombrante; si preferisce di conseguenza usare molle

leggere, di deformazioni piccole, e moltiplicarle mediante un appropriato e preciso meccanismo.

27. *Meccanismo indicatore con rapporto moltiplicatore variabile con legge prestabilita.* — Consideriamo un meccanismo composto di aste snodabili, disposte come è rappresentato dalla fig. 26, ed indichiamo con:

D_x — la posizione di un punto D sull'asse di

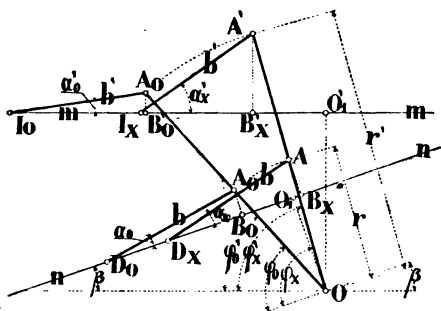



Fig. 26.

deformazione $n\,n$ la cui distanza da un'origine D_o rappresenta la deformazione della molla corrispondentemente alla forza F;

I_x — la corrispondente posizione dell'indice I sull'asse della graduazione $m\,m$, misurato anche esso a partire da un'origine I_o ;

k_x — il coefficiente di moltiplicazione;

φ_0, φ_x — ⎫ gli angoli che l'asta moltiplicatrice
φ'_0, φ'_x — ⎭ forma con le direzioni $m\,m$, $n\,n$;

α_0, α_x — ⎱ gli angoli che le bielle $b\,b'$ formano
α'_0, α'_x — ⎰ con le direzioni $m\,m$, $n\,n$;
β — l'angolo dei due assi $m\,m$, $n\,n$;
b, b — la lunghezza delle due bielle;
r, r' — le parti della leva di moltiplicazione, comprese fra il fulcro ed i punti $A\,A'$ d'unione colle bielle.

Avremo:

$$k_x = \frac{I_o\,I_x}{D_o\,D_x}\,.$$

Da similitudine di triangoli ricaviamo successivamente:

$$O_1\,D_o = r\cos\varphi_o + f\cos\alpha_o\,;$$
$$O_1\,D_x = r\cos\varphi_x + f\cos\alpha_x\,;$$
$$O_0\,D_x = r(\cos\varphi_o + \cos\varphi_x) + f(\cos\alpha_o - \cos\alpha_x)\,;$$

$$I_o\,I_x = r'(\cos\varphi'_o - \cos\varphi'_x) + f'(\cos\alpha'_o - \cos\alpha'_x);$$

e quindi:

$$k_x = \frac{r'(\cos\varphi'_o - \cos\varphi'_x) + f'(\cos\alpha'_o - \cos\alpha'_x)}{r(\cos\varphi_o - \cos\varphi_x) + f(\cos\alpha_o - \cos\alpha_x)}$$

formula che contiene implicitamente l'angolo β, cioè l'angolo dei due assi $m\,m$, nn, poichè:

$$\varphi_x = \varphi'_x + \beta$$
$$\varphi_o = \varphi'_o + \beta.$$

Il coefficiente k_x è quindi esprimibile in funzione di un solo angolo.

Poichè r, r', b, b' sono quantità fisse e di valore finito, ne viene per conseguenza che avremo due posizioni limiti dell'angolo variabile, e precisamente quelle corrispondenti alle posizioni degli estremi D ed I delle bielle per cui $(r + b)$, $(r' + b')$ formano un segmento rettilineo, anzichè mistilineo. In generale considerate isolatamente le due somme $(r + b)$, $(r' + b')$ avremo quattro posizioni limiti del sistema; osservando però che due posizioni sono sempre comprese entro l'angolo delle altre due, ne risulta chiaramente che per posizioni limiti devonsi intendere quelle che formano l'angolo minore. Dando a quest'angolo φ, i vari valori di cui esso è suscettibile, per valori speciali di β, r, r', b, b' avremo la legge di variazione del coefficiente k_x. Da ciò ne segue che, avendo a nostra disposizione cinque quantità, a cui potremo assegnare quei valori arbitrari compatibili con le altre esigenze del meccanismo, potremo ottenere per k_x la legge di variazione che si vuole o che abbisogna.

28. *Meccanismo indicatore con rapporto moltiplicatore costante.* — Si voglia, ad esempio, che il moto del punto D, a qualunque legge esso obbedisca, si trasmetta al punto I, lasciandone inalterata la legge, a meno di una costante k_x. Dovremo porre nella formula precedente:

$$k_x = \text{costante}$$

La equazione generale del sistema articolato esaminato precedentemente, colla sostituzione del-

l'eguaglianze:

$$\varphi'_x = \varphi_x - \beta$$
$$\varphi'_o = \varphi_o - \beta$$

diventa:

$$k_x = \frac{r'[\cos(\varphi_o - \beta) - \cos(\varphi_x - \beta)] + f'[\cos\alpha'_o - \cos\alpha'_x]}{r[\cos\varphi_o - \cos\varphi_x] + f[\cos\alpha_o - \cos\alpha_x]}.$$

Se ora poniamo:

$$\beta = 0$$
$$\alpha_o = \alpha'_o$$
$$\alpha_x = \alpha'_x$$

e per conseguenza:

$$\frac{r'}{r} = \frac{b'}{b}$$

avremo:

$$k_x = \frac{f'}{f} = \frac{r'}{r} = \text{costante}$$

Le condizioni poste sono quindi sufficienti per avere la trasmissione del moto da un punto all'altro, con eguale legge di movimento, a meno di una costante k_x.

Altra disposizione del meccanismo precedente. — La disposizione precedente può essere modificata in modo da avere i due raggi $r\ r'$ da parte opposta del fulcro O di rotazione (fig. 27) ma le formule non subiscono per questo delle variazioni.

29. *Altre disposizioni per ottenere un rapporto moltiplicatore costante.* — Riprendiamo la equazione:

$$k_x = \frac{r'[\cos\varphi'_o - \cos\varphi'_x] + f'[\cos\alpha'_o - \cos\alpha'_x]}{r[\cos\varphi_o - \cos\varphi_x] + f[\cos\alpha_o - \cos\alpha_x]}$$

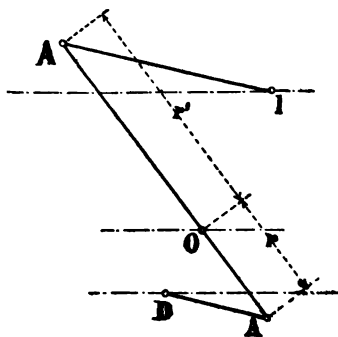



Fig. 27.

che per $\beta = o$, diventa:

$$k_x = \frac{r' A + f' B}{r A + f B}$$

ponendo:

$$A = \cos\varphi_o - \cos\varphi_x$$
$$B = \cos\alpha_o - \cos\alpha_x$$
$$B' = \cos\alpha'_o - \cos\alpha'_x \,.$$

Si voglia ancora k_x = costante, come nel caso precedente.

Anzichè porre le condizioni dianzi precisate, potremo determinare b' per modo che si abbia

$$k_x = \text{costante}$$

L'equazione risultante in generale è alquanto complessa, tuttavia possiamo graficamente ottenere questo risultato, dopo vari tentativi.

Immaginiamo l'asta b' sostituita da altre due ad angolo retto (fig. 28), di cui la seconda possa

Fig. 28.

scorrere normalmente alla prima nel suo estremo. Col variare della lunghezza d' avremo una variazione della lunghezza b'. Disegnamo ora varie posizioni che assume il meccanismo, assegnando al punto estremo dell'asta $A_0 D_x$ posizioni egualmente distanti fra di loro, a partire da un punto fisso, ad esempio D_0, e portiamo queste sull'asse x di un sistema d'assi coordinati (fig. 29). Sulle

singole ordinate portiamo le distanze del punto estremo delle due aste predette misurate a partire dalla posizione corrispondente alla posizione D_0. Avremo una curva che passerà certamente per l'origine, poichè per l'ascissa x_0 eguale a zero si ha l'ordinata y_0 uguale a zero. Eseguendo queste operazioni per due posizioni qualunque del sistema, cioè delle due aste, si vedrà tosto se

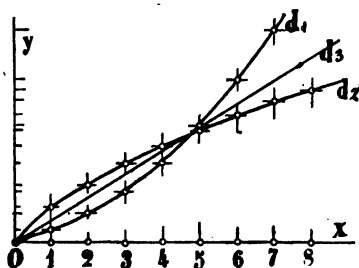



Fig. 29.

devesi variare in un senso o nell'altro la distanza dx per avere la curva, od almeno un suo tratto, dianzi accennata trasformata in una retta.

30. *Meccanismo indicatore moltiplicatore dell'Ing. Morosini.* — Consideriamo il sistema articolato riportato dall'Ing. Morosini nel giornale dell'*Ing. Civile e le Arti Industriali*, (fascicolo 11, anno VII) e rappresentato dalla fig. 30.

Poniamo:

$$EM = EN = 1$$
$$MD = 2$$
$$EC = 3$$

Applicando la punta indicatrice o registratrice in N e spostando di una unità il punto M avremo che il punto E si sposta di $\frac{3}{2}$, ed N di $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$.

Cioè il moto di M si trasmette ad N a meno della costante 2.

Inseriamo ora le aste DE, CE in E_1 per cui sia:

$$E_1 N = E_1 M = 4$$
$$DM = 5$$
$$E_1 C = 6$$

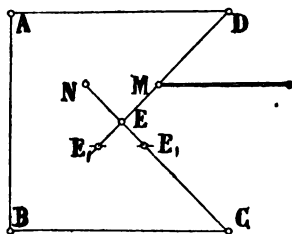



Fig. 30.

Per lo spostamento di una unità del punto M si ha che E si sposta di $\frac{9}{5}$ ed N di $\frac{9}{5} \cdot \frac{10}{6} = 3$.

Cioè il moto di M si trasmette ad N a meno della costante 3.

Poniamo infatti che $D\,M\,N\,E\,C$, $D\,M'\,N'\,E'\,C$ (fig. 31) rappresentino due posizioni del sistema, supponendo che la deformazione avvenga per modo che i punti mobili percorrono rette paral-

lele fra di loro; avremo:

$$EE' : MM' = ED : MD$$

$$EE' = MM' \frac{ED}{MD}$$

$$NN : EE' = NC : EC$$

$$NN' = EE' \frac{NC}{EN}$$

e quindi:

$$NN' = MM' \frac{ED \, . \, NC}{MD \, . \, EC} .$$

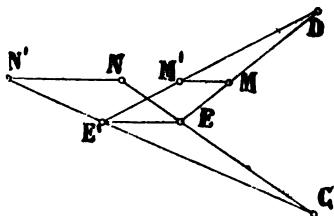



Fig. 31.

Da questa formula, per le posizioni fatte sopra otteniamo precisamente che NN' è doppio o triplo di MM' a seconda del caso. La supposizione fatta sopra, cioè che i punti percorrano rette parallele, mostra chiaramente che sarebbe necessario che i punti D e C non rotassero intorno a dei punti fissi A e B (fig. 30) ma dovrebbero spostarsi lungo la loro congiungente DC di quanto occorre per permettere al meccanismo di funzionare. Tut-

tavia entro limiti, facili a trovarsi, per eguali lunghezze delle aste AD, BC, e per spostamenti simmetrici di esse rispetto alla congiungente AB, la moltiplicazione risulta esatta.

31. *Meccanismo indicatore a quadrante.* — Siano OM ed AM due aste di un sistema articolato di cui i punti M ed O rappresentino le cerniere

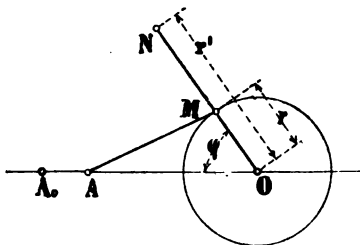



Fig. 32.

(fig. 32); l'estremo A dell'asta OM si muova lungo un diametro del cerchio descritto dall'estremo M dell'altra asta. Avremo:

$$A_0 A = l + r - (l \cos \alpha + r \cos \varphi)$$

indicando con:

l — la lunghezza dell'asta AM:
r — la » » OM:
α, φ — gli angoli formati dalle due aste colla retta AO, ed in una posizione qualunque del sistema.

Ma:

$$\frac{l}{r} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \alpha}$$

quindi:

$$A_0 A = l + r - \left[\sqrt{l^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + r\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi}\right],$$

la quale, ponendo:

$$\frac{l}{r} = \varepsilon$$

diventa:

$$A_0 A = r\left\{(\varepsilon - 1) - \left[\sqrt{\varepsilon^2 - \operatorname{sen}^2 \varphi} + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi}\right]\right\}.$$

Poichè nella formula figurano le linee trigonometriche dell'angolo φ rotante dell'asta OM attorno al centro O, al variare uniforme di φ avremo per A un moto non uniforme. In altri termini, la legge che regola il moto circolare del punto M viene alterata se si considera il moto del punto A.

Tuttavia per valori di φ compresi entro certi limiti potremo ritenere che per il moto angolare uniforme dell'asta OM, il punto A si muova di moto uniforme. I limiti di quest'angolo variano al variare di ε, e potremo caso per caso cercarlo servendoci di un diagramma ottenuto in modo analogo a quello rappresentato dalla fig. 29.

Rappresenti la fig. 33 un diagramma del moto del punto A al variare uniforme di φ, del meccanismo rappresentato dalla fig. 32. Dovremo di questa curva scegliere quel tratto che più s'avvicina alla retta e considerare come limiti di φ i valori di φ_1 e φ_2 che corrispondono a detto tratto.

Determinate le dimensioni delle aste per modo

che il moto di A si trasmetta ad M con legge uguale o con un noto coefficiente moltiplicatore k, applicando la punta registratrice in un punto qualunque N dell'asta $O\,M$, avremo che il moto di A si trasmette al moto circolare di N con la stessa legge, a meno del coefficiente moltiplicatore:

$$k_x = k\,\frac{r_x}{r}$$

dove r_x rappresenta la distanza del punto N sull'asta $O\,M$ a partire da O.

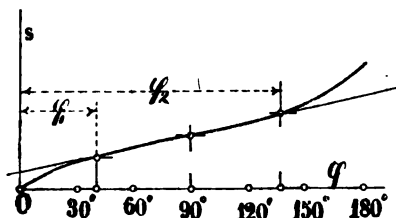



Fig. 33.

In generale nell'applicazione pratica di questo principio, il punto M trovasi su di un braccio normale ad $O\,M$ e ad egual distanza da O.

32. *Altro meccanismo indicatore a quadrante.* — Sostituiamo al braccio $O\,M$ del meccanismo precedente un rocchetto dentato, e muniamo l'asta $A\,M$ di una cremagliera; avremo il meccanismo rappresentato dalla fig. 34. La linea primitiva della dentatura della cremagliera, sviluppandosi sulla linea primitiva del rocchetto, trasmette il

moto di A ad un punto qualunque della circonferenza del rocchetto O con egual legge. La formula precedente quindi diventa:

$$k_x = \frac{r_x}{r}$$

esendo $k = 1$.

Occorre osservare che un meccanismo moltiplicatore usufruente del principio suesposto, deve avere eliminato tutti i possibili giochi fra i denti del rocchetto e della cremagliera.

33. *Modificazione del meccanismo precedente.* — Il raggio della cremagliera ha valore infinito, e

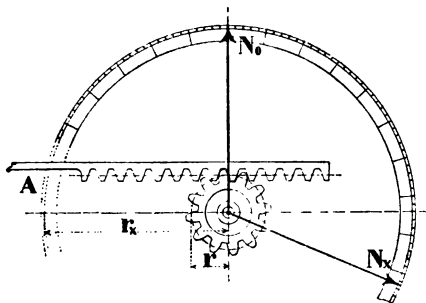



Fig. 34.

per conseguenza dobbiamo considerare come all'infinito il centro di rotazione della cremagliera.

Se invece supponiamo che il centro sia a distanza finita, $(R + r)$ (dove R è raggio dell'arco sostituito alla cremagliera) dal centro del rocchetto in una direzione qualunque, il movimento rettilineo del punto A si trasforma in movimento angolare.

La fig. 35 rappresenta schematicamente tale meccanismo. Il moto angolare dell'arco dentato di raggio R è moltiplicato secondo la formula precedente, modificata per modo da tener conto della moltiplicazione dei due movimenti angolari delle

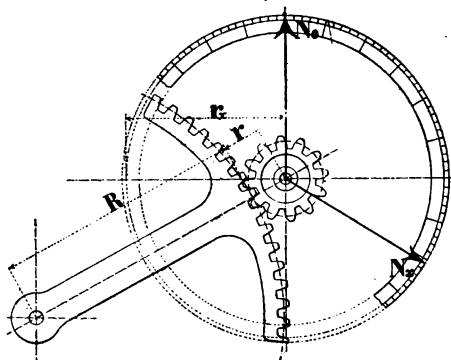



Fig. 35.

due ruote. Tale coefficiente di moltiplicazione è evidentemente $\frac{R}{r}$, poichè tale è il rapporto fra due angoli delle due ruote che sottendono eguali lunghezze d'archi sulle rispettive circonferenze primitive; per cui avremo:

$$k_x = \frac{R}{r}\frac{r_x}{r} = \frac{R\,r_x}{r^2}\,.$$

§ 3. Meccanismo registratore.

34. *Organi di un meccanismo indicatore.* — Intenderemo per meccanismo registratore quelle disposizioni d'organi che forniscono sia un diagramma ortogonale o polare, sia un numero da cui dedurre il lavoro misurato dal dinamometro. Lo scopo stesso di questi meccanismi a cui sono destinati, mostra che di essi devesi considerare due parti distinte:

1°) Organi che registrano gli *sforzi:*

2°) Organi che registrano gli *spazi.*

I primi sono strettamente legati ai meccanismi moltiplicatori, formandone essi, in generale, la parte estrema, cioè la punta registratrice degli sforzi; i secondi sono collegati strettamente ai primi pel fatto che devono fornire le registrazioni dello spazio nello stesso istante e nella stessa posizione. Il diagramma che con i due suddetti movimenti si ottiene, è, dunque, formato per modo che ogni suo punto, colla sua ascissa misurata in una data scala fornisce lo spazio, e colla sua ordinata, misurata pure con apposita scala, fornisce lo sforzo che in quell'istante ed in quella posizione misura il dinamometro. Ma poichè non è possibile, od almeno sarebbe alquanto complicato un meccanismo che spostasse la punta registratrice nei due sensi delle ascisse e delle ordinate, si preferisce generalmente che la punta registratrice soggetta all'azione ed alle deformazioni della molla segni le ordinate, mentre gli spazi siano

descritti dal moto della carta su cui deve essere descritto il diagramma. Tuttavia questo fenomeno non è generale, giacchè esamineremo un meccanismo sul quale la punta registratrice percorre simultaneamente due direzioni, nel mentre la carta su cui deve essere descritto il diagramma resta immobile.

Poichè il moto della punta registratrice degli sforzi è intimamente collegata col meccanismo indicatore ne segue che del meccanismo registratore resta solo a considerare quegli organi che misurano lo spazio, siano essi disposti per muovere la carta oppure la punta registratrice di un dinamometrografo o gli analoghi di un ergometro.

Lo spazio lungo il quale agisce la forza che il dinamometrografo deve misurare e registrare non è ben determinato, per cui la carta del diagramma è bene sia di lunghezza indeterminata. Talvolta però, come vedremo, il meccanismo non permette che una determinata lunghezza, per cui il dinamometro dovrà essere munito di un meccanismo accessorio per arrestare a tempo opportuno il movimento della carta stessa.

35. *Meccanismo registratore adoperato nel dinamometro del Morin.* — Consideriamò una serie di rulli A, R, R, B (fig. 36) dal primo dei quali si svolge una striscia di carta trascinata dal rullo B, il cui moto per ora supponiamo uniforme, senza curarne la causa prima, dopo essere passata sopra i rulli di rimando R, R. In direzione normale al moto della carta, e precisamente sulla generatrice superiore di uno dei rulli di rimando, si muove

la punta registratrice. Con tale sistema di rulli (fig. 36) risulta evidente che la velocità lineare della carta, eguale alla periferica del rullo *B*, avvolgente la carta, non mantiene un rapporto costante colla velocità angolare del rullo stesso, il che molte volte è necessario. Per ovviare a tale inconveniente si collega il rullo *B* con due altri rulli *B'*, *C* il primo di forma tronco conica, il secondo di diametro costante.

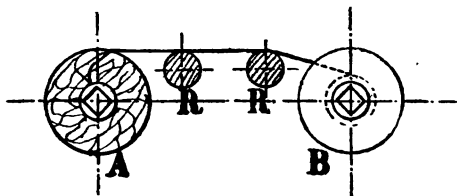



Fig. 36.

Il rullo *B'* riceve il movimento (fig. 57) a mezzo di una funicella comandata dal rullo *C*, ed è rigido al rullo *B*. La conicità del rullo *B'* è calcolata in modo che la velocità angolare di *B* diminuisce di quanto aumenta la velocità periferica del rullo *B* all'aumentare dello spessore della carta sul rullo stesso e viceversa.

36. *Inconvenienti del meccanismo precedente e meccanismo per eliminarli.* — Il sistema precedente non può svolgere di carta più di quella quantità che può essere contenuta nel rullo *B*, ed inoltre quella quantità che è permessa di avvolgere attorno a *B* dalla funicella che s'avvolge sul tronco cono

B'. Inoltre non è possibile tagliare un diagramma della striscia, intermedio, senza riportare alla posizione iniziale il meccanismo completo. Ad ovviare tale inconveniente è stato ideato di svolgere la carta dal rullo O_2 (fig. 37) su cui è immagazzinata, mediante la frizione di un rullo O di diametro costante, su cui è mantenuta aderente da due piccoli rulli compressori O_1 O_1 e di cui abbraccia gran parte della periferia in grazia del rullo di rinvio O_3.

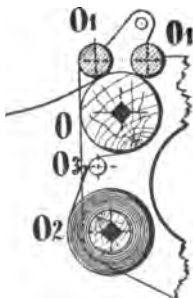



Fig. 37.

La punta registratrice percorre una generatrice del rullo O e generalmente la generatrice superiore posta fra i due rulli compressori.

In tal modo il rapporto fra la velocità lineare della carta ed angolare del rullo O è costante, e si può togliere il diagramma, od una sua parte dalla striscia senza ricondurre il meccanismo nella sua posizione iniziale.

37. *Meccanismo registratore precedente, ridotto alla sua più semplice disposizione.* — Facendo rotare con piccola velocità angolare il rullo O, ed immaginando una striscia di carta di lunghezza eguale alla periferia del rullo O, si riduce il meccanismo precedente alla sua più semplice espressione (fig. 38). Tuttavia tale sistema presenta l'inconveniente di non potere ottenere diagrammi della lunghezza superiore alla periferia del rullo

O. Questo ultimo sistema invece non presenta l'inconveniente di non potere isolare un diagramma, anzi bisogna volta per volta che un dia-

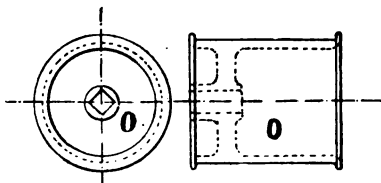



Fig. 38.

gramma è registrato toglierlo, evitando così anche la possibilità di essere rovinato o guastato da qualche incidente.

38. *Meccanismo registratore adoperato nel dinamometro della Casa Kraft-Rost.* — Immaginiamo un meccanismo formato di una lancetta il cui spostamento angolare da una posizione, che diremo iniziale, rappresenti la intensità della forza in quell'istante, ed una punta registratrice che si muove di un dato moto lungo la lancetta stessa. Se sotto la punta si colloca una carta, su cui rimangono le traccie delle posizioni che assume la punta registratrice nei vari istanti, avremo un diagramma; esso è un diagramma polare, poichè ogni punto

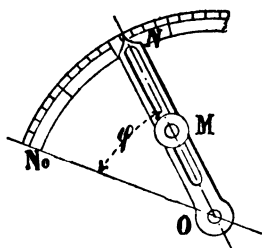



Fig. 39.

è riferito ad un centro (centro di rotazione della lancetta (fig. 39) e ad una retta passante pel centro. In questo diagramma gli spazi sono rappresentati dal vettore OM o parte di esso, e la forza dell'angolo φ che il vettore stesso forma con la posizione iniziale.

39. *Meccanismi pel secondo movimento del meccanismo registratore.* — Il moto, sia angolare dei rulli che mettono in moto la carta nei meccanismi dianzi considerati, sia rettilineo della punta registratrice, deve essere eguale o proporzionale al moto del punto d'applicazione della forza. Diversi sono i meccanismi adoperati a tale scopo. Eccone i principali.

40. *Meccanismo d'orologeria.* — Uno dei più semplici, perchè non presenta nessun punto di contatto materiale colla linea percorsa dal punto d'applicazione della forza, è un movimento d'orologeria. Tuttavia questo sistema non può servire che nei casi in cui la velocità del punto d'applicazione della forza sia uniforme.

Negli altri casi il diagramma presenta inconvenienti tali per calcolarne il valore esatto del lavoro nell'unità di tempo e della forza, che generalmente sono, in pratica, insormontabili, giacchè la formula:

$$L = \int_A^B F \cos \theta \, d s$$

esige, come sappiamo, la conoscenza dei singoli valori istantanei della forza F, e del corrispondente spazio percorso nei singoli istanti in cui F

si può considerare costante, il che non è facile se non si conosce la legge con cui si muove il punto di applicazione della forza *F*. Occorrerebbe quindi che il moto della forza lungo la sua traiettoria fosse perfettamente noto, ma ciò è difficilis simo se non che quando esso è uniforme.

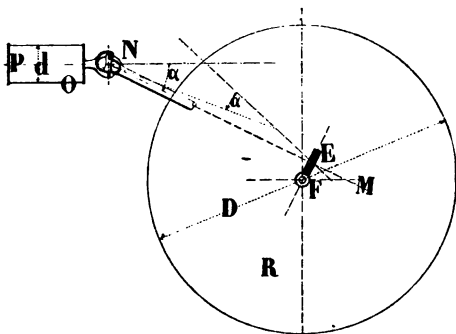



Fig. 40.

41. *Spostamento della carta mediante ruota di contatto e giunto cardanico.* — Immaginiamo una ruota di appropriato diametro che si sviluppi sulla linea percorsa dal punto d'applicazione della forza. Il moto angolare di questa è sincrono col moto della forza lungo la linea. Colleghiamo il rullo *O* della carta (fig. 40) alla ruota dianzi considerata mediante un giunto cardanico ed appropriati ingranaggi.

Avremo che il moto del rullo *O* è sincrono col moto della ruota *R* e quindi con lo spazio. Tale

sincronismo però è esatto solamente se si considera un grande complesso di giri interi o mezzi giri, ma non durante un mezzo giro.

Rappresenti la fig. 40 l'insieme della disposizione precedente, e la fig. 41 la schematica dispo-

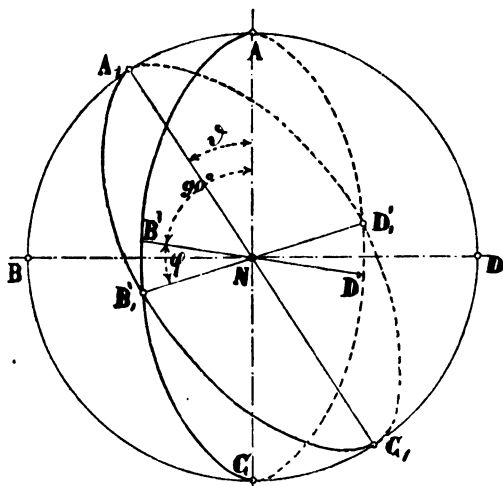



Fig. 41.

sizione di due successive posizioni del giunto cardanico. Per la rotazione dell'angolo ϑ dell'albero conducente, l'albero condotto dalla posizione NB' è passato nella posizione NB'_1 descrivendo un angolo φ. Indicando con:

α — l'angolo che formano i due assi, e quindi l'angolo del diedro formato dai due piani nor-

mali agli assi passanti pel loro punto d'incontro N;

ω' — la velocità angolare dell'albero condotto;

ω'' — la velocità dell'albero conducente;

μ — il rapporto fra i giri della ruota R e dell'albero conducente, e quindi anche fra le rispettive velocità;

ω — la velocità angolare della ruota R;

b — lo spazio percorso da un punto della periferia del rullo O di diametro d;

s — lo spazio percorso da un punto della periferia della ruota R di diametro D;

θ — il valore dell'angolo di rotazione dell'albero conducente;

φ — il valore dell'angolo di rotazione dell'albero condotto.

Avremo successivamente:

$$\cos A_1 B'_1 = \cos A A_1 \cos A B'_1 + \\ + \operatorname{sen} A A_1 \operatorname{sen} A B'_1 \cos A .$$

$$1 = -\cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \cos \alpha$$

$$\operatorname{tang} \theta = \operatorname{tang} \varphi \cos \alpha$$

$$\omega' = \omega \frac{\cos \alpha}{1 - \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \alpha} =$$

$$= 0{,}809\, \omega \cdot \frac{1}{1 - 0.345 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$b = \int \frac{d\theta}{1 - 0{,}345 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$= \operatorname{arco} \operatorname{tang} \{ 0{,}81 \operatorname{tang} \theta \}$$

$$s = n \operatorname{arco} \theta .$$

Si potrebbe eliminare θ dalle due ultime equazioni e ricavare la relazione fra b ed s. Tuttavia i valori di b ed s e la loro relazione, si possono ricavare più semplicemente dalla equazione:

$$\text{tang}\,\theta = \text{tang}\,\varphi \cos \alpha$$

poichè per ogni valore di θ, essa fornisce un solo valore di φ, e per ogni coppia di valori θ, φ si ha:

$$b = \text{arco}\,\varphi$$
$$s = \eta\,\text{arco}\,\theta$$

Le relazioni che forniscono le quantità b ed s, poichè esse contengono linee trigonometriche dell'angolo di cui ruota l'albero conduttore MN del giunto, permette d'osservare che il moto della ruota R non è trasmesso, a meno di un coefficiente costante di proporzionalità ad un punto del rullo O, ma con un rapporto vario di cui vedremo più innanzi le conseguenze.

Avremo eliminato questo inconveniente se usiamo di due giunti riuniti e disposti per modo che le variazioni si compensino (fig. 40). Occorre osservare che è necessario mantenere la simmetrica disposizione dell'albero intermedio rispetto ai due estremi.

42. *Meccanismo a funicella.* — La rotella R del meccanismo precedente, non si mantiene sempre aderente alla linea del terreno sulla quale deve svolgersi, per cui avvengono facilmente delle interruzioni nel moto della carta, interruzioni che alterano la forma del diagramma od il numero fornito da un ergometro.

Per ovviare a ciò si è realizzato la linea che deve essere percorsa dalla forza con una funicella *m* (fig. 42) immagazzinata in una rotella F_1 fissa all'apparecchio, fissando il capo della fune ad un punto esterno all'apparecchio.

Sia che si muova la fune di moto eguale allo spazio percorso dal punto d'applicazione della

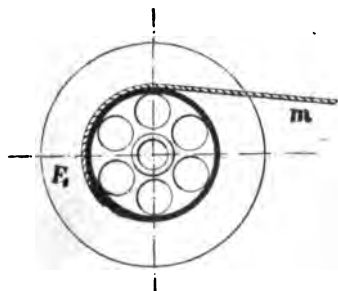



Fig. 42.

forza, sia che si muova l'apparecchio, la F_1 si muove di moto angolare sincrono col moto della forza, sincrono con la esattezza che qui sotto vedremo.

43. *Inconvenienti del meccanismo precedente.* — L'apparecchio precedente non realizza il vero se non quando nella rotella F_1 si disponga perifericamente uno strato solo di funicella. Poichè questo non può avvenire, perchè piccolo sarebbe lo spazio lungo il quale si considera la forza, o grande la rotella F_1, così si usa porre in essa più strati. Questo fa variare il rapporto fra

la velocità angolare della F_1 e lineare della fune, variazione costante per ogni nuovo strato di fune svolgentesi, ammesso che la fune sia raccolta in strati uniformi sulla F_1.

44. *Disposizione per evitare l'inconveniente precedente.* — Per ovviare a questo inconveniente si usa la F_1 come magazzeno e si fa scorrere la fune

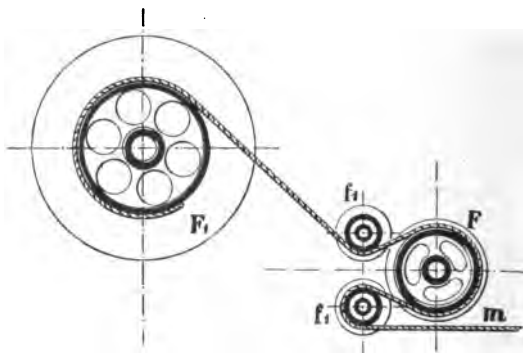



Fig. 43.

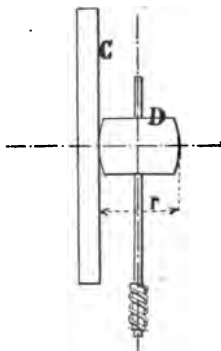
stessa attorno ad una seconda rotella F (fig. 43), di cui abbraccia gran parte della periferia in grazia di due rotelline f_1, di rinvio. Percorrendo la fune la periferia costante della F, è chiaro che il rapporto fra la velocità lineare della fune e la velocità angolare della F rimane costante.

45. *Meccanismo integratore.* — Consideriamo un disco C (fig. 44) animato di moto uniforme e proporzionale allo spazio percorso dalla forza, e, normalmente ad esso, un cilindro D. Quando il

cilindro D trovasi nel centro del disco C esso resta immobile, ma se si sposta di una certa quantità il numero dei giri risulta proporzionale allo spostamento del cilindro D. Ma la velocità angolare di C essendo proporzionale allo spazio, ne risulta che, per uno spostamento del cilindro D, la sua velocità risulta proporzionale tanto allo spazio quanto allo sforzo, che ha prodotto lo spostamento.

Fig. 44.

Indicando con:

F — la forza agente lungo l'asse del cilindro D che determina lo spostamento x:
n' — il numero dei giri del disco C:
n'' — il numero dei giri del disco D:
r — il raggio del cilindro D:
x — lo spostamento del disco D misurato dal centro del disco C lungo un diametro;

Si ha:

$$2\pi x n' = 2\pi r n''$$
$$x n' = r n''.$$

Indicando inoltre con:

t — il tempo di durata dell'esperienza:
m — il numero dei giri della rotella C per il percorso di un metro della forza F:

a — il numero dei kilogrammi occorrenti per lo spostamento di un $^{m}/_{m}$ del cilindro D;

e quindi:

$\frac{1}{a}$ — il valore dello spostamento del detto cilindro D per effetto dell'unità di forza, ossia chilogrammo;

Si ha:

$\frac{n'}{m}$ = spazio percorso dalla forza in metri;

$\frac{x}{\frac{1}{a}}$ = sforzo esercitato dalla forza F lungo l'asse del cilindro D corrispondente allo spostamento x del cilindro D;

e quindi, indicando con $\mathcal{L}$ il lavoro, avremo:

$$\mathcal{L} = a\, x \frac{n'}{m}\,.$$

Ma abbiamo visto che $x\, n' = r\, n''$, per cui:

$$\mathcal{L} = a\, r \frac{n''}{m} = K\, n''\,,$$

indicando con K una costante dell'apparecchio.

In cavalli vapore avremo poi:

$$C = \frac{a\, r}{75 \cdot t} \frac{n''}{m} = K_1 \frac{n''}{t}$$

indicando con K_1 una costante dell'apparecchio, diversa dalla precedente solo per il coefficiente numerico $\frac{1}{75}$.

L'apparecchio quindi, rappresentato schematicamente dalla fig. 44, con due organi solamente, fornisce il lavoro di una forza lungo uno spazio mediante il numero dei giri del cilindro *D* a meno di una costante che dipende dalle dimensioni e forma dei detti organi.

Nell'usare la formula sopra esposta conviene non dimenticare il coefficiente di correzione che vedremo più innanzi.

Parte Seconda.

DESCRIZIONE DEI PRINCIPALI DINAMOMETRI

§ 1. Dinamometri semplici di trazione.

46. *Disposizione generale di un dinamometro semplice di trazione.* — In questo gruppo di apparecchi per la misura delle forze devesi comprendere tutti quegli apparecchi adottati per la misura di forze, a guisa di bilancie, ma che utilizzano le molle come organo principale.

La deformazione di queste segnate su apposita scala, sia essa moltiplicata o no, precisa la intensità della forza. La direzione coincide generalmente coll'asse dell'apparecchio stesso, a menochè disposizioni speciali non mantengono l'apparecchio stesso lungo una linea non coincidente con quella d'azione della forza.

L'applicazione più semplice consiste nel munire di un indicatore l'estremo di una delle molle rappresentate dalle fig. 15-25 fissate all'altro estremo e sottoposte a forze agenti o no lungo gli assi di simmetria. Ne sono esempi i seguenti dinamometri.

47. *Bilancia a molla.* — La fig. 45 rappresenta un dinamometro formato di molla deformata per compressione e che costituisce la parte essenziale di certe bilancie.

Nel tubo esterno che forma l' involucro o riparo della molla ed il sostegno nello stesso tempo, vi è praticata una fenditura lungo la quale si sposta un indice rigidamente collegato colla parte superiore del gancio centrale e quindi colla estremità superiore della molla; l'estremità inferiore della molla è mantenuta in posizione dall'apposito cappelletto che s'avvita alla parte inferiore del tubo. La parte superiore della molla fissa all'estremo del gancio su cui agisce la forza, od un carico che indicheremo con P, tende a deformare per compressione la molla, mantenuta, fissa mediante un apposito anello dell'involucro ad un punto rigido; l'indice si sposta lungo l'asse d'azione del carico P, e precisamente nella fenditura dell'involucro, arrestandosi quando la reazione della molla stessa ed il carico P si fanno equilibrio. Vicino alla fenditura una piccola piastrina su cui sono segnate delle divisioni serve da graduazione. La formula:

Fig. 45.

$$f = \frac{R^2 t}{E_t r} 2 \pi n$$

serve a determinare teoricamente la graduazione; graduazione però che è generalmente determinata mediante l'operazione pratica di taratura dell'apparecchio, come vedremo a suo tempo.

La disposizione analoga alla precedente, ma

tale che la molla agisca per tensione, è meno pratica, per quanto abbiamo visto; tuttavia la graduazione viene fatta colle stesse formule teoriche e colla stessa operazione pratica.

48. — La fig. 46 rappresenta la utilizzazione della molla rappresentata dalla fig. 16. La deformazione dovuta alla forza od al carico, sia che

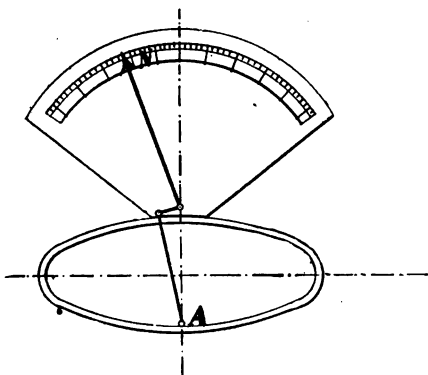



Fig. 46.

esso agisca per trazione lungo l'asse *a a'*, sia che agisca per compressione lungo l'asse *b b'*, normale ad *a a'*, è trasmesso all'indicatore studiato al N. 31.

Il quadrante fisso alla molla superiore porta due graduazioni diverse per i due generi diversi di sforzi (trazione e compressione) a cui può essere sottoposto il dinamometro. L'apparecchio indicatore porta inoltre un secondo indice, la cui funzione esamineremo in seguito (N. 55).

La graduazione è precisata, in questo dinamometro dalle formule:

$$f = \frac{P}{EI}\frac{c^2}{3}$$

$$k_x = k\,\frac{r_x}{r}\,.$$

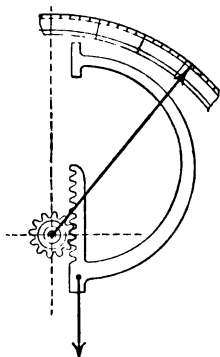
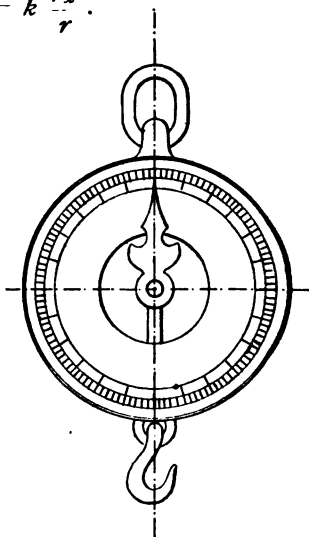



Fig. 47. Fig. 48.

i cui elementi sono quelli citati nello studio delle stesse singole parti del meccanismo moltiplicatore, oppure determinati colla taratura.

49. La molla rappresentata dalla fig. 18 trova la sua applicazione nel dinamometro a quadrante

rappresentato dalla fig. 48, la cui schematica rappresentazione delle sue parti principali è data dalla fig. 47. In questo dinamometro ad un estremo della molla sono fissati il quadrante e l'asse dell'ingranaggio, che diremo moltiplicatore, servendo

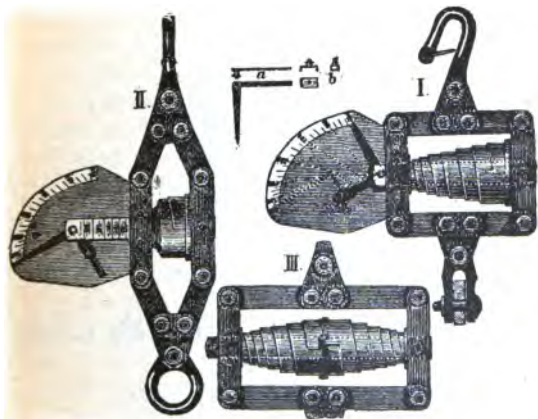



Fig. 49.

esso alla moltiplicazione delle deformazioni della molla; all'altro estremo la forza od il carico *P* a mezzo di un conveniente gancio.

La scala è determinata con la taratura o mediante le apposite formule già trovate.

50. *Dinamometro a molla a spirale conica a sezione rettangolare della casa Sack.* — Il dinamometro costruito dalla casa Sack, rappresentato della fig. 49 è una applicazione della molla rap-

presentata dalla fig. 24. Esso è formato di una di tali molle (o due o più a seconda degli sforzi a cui deve essere sottoposto) e dell'indicatore semplice studiato al N. 26 oppure dell'indicatore a leva studiato al N. 31 e rappresentato dalla fig. 32, alquanto modificato, come vedremo ora.

Fig. 50.

Tale modificazione è schematicamente rappresentata dalla fig. 50.

In questo indicatore, anzichè essere fisso il vertice dell'angolo retto della leva a squadra, è mobile, e funziona da fulcro un vertice mentre l'altro funziona da indicatore.

Ambedue questi punti descrivono rette parallele all'asse lungo il quale avviene la deformazione della molla o delle molle. Tale disposizione

fa variare la legge secondo la quale avviene la trasmissione e moltiplicazione del moto relativo fra i due estremi delle molle. Nel segnare la graduazione devesi quindi tener conto di tale variazione, se non allo scopo di precisare con esattezza la scala (il che si ottiene con la taratura come vedremo), per determinare la dimensione dell'indice e della piastra su cui la graduazione deve essere segnata.

Il movimento dell'indice (fig. 50) $A\,I$ da una posizione ad un'altra, ad esempio dalla posizione iniziale $O\,A_0\,I_0$ ad una posizione qualunque $O\,A\,I$ si può considerare come la composizione di due movimenti distinti. Indicando con:

s — lo spostamento del punto A lungo l'asse dell'apparecchio:

φ — l'angolo corrispondente fra le due posizioni dell'indice $A\,I$:

avremo da considerare i due movimenti semplici:

1°) Rotazione attorno al punto A_0 dell'angolo φ fino ad ottenere la posizione $O_1\,A_0\,I'$:

2°) Spostamento lineare nella direzione $A_0\,A$ della quantità s.

Riferiamo i punti della curva descritta dall'indice I a due assi normali passanti dal punto A_0, ammesso che esso coincida con la posizione più bassa del meccanismo, cioè con la posizione iniziale, ed indichiamo con:

d, h — le coordinate in valore assoluto del punto O;

x_0, y_0 — le coordinate del punto I_0;

x, y — le coordinate del punto I;
R — la lunghezza del braccio $A\ I$;
φ — l'angolo colla posizione iniziale del braccio $A\ O$;

avremo per un punto qualunque:

$$x = R \operatorname{sen} (\alpha - \varphi)$$
$$y = [h - d \operatorname{tang} (\alpha - \varphi)] + R \cos (\alpha - \varphi)$$

da cui eliminando φ avremo una equazione con due incognite che ci fornisce una serie di coppie di valori $x\,y$, cioè la curva del piano lungo la quale si sposta l'indice I.

Nelle due equazioni soprascritte, ponendo $\varphi = o$, otteniamo le coordinate del punto iniziale I_o

$$x_o = R \operatorname{sen} \alpha$$
$$y_o = R \cos \alpha$$

poichè abbiamo evidentemente:

$$d \operatorname{tang} \alpha = h.$$

Le stesse coordinate le possiamo ottenere direttamente considerando il triangolo $A_0\ I_0\ N_0$. Infatti si ha:

$$x_0 = R \operatorname{sen} \alpha$$
$$y_o = R \cos \alpha$$

formule che coincidono con quelle derivate da quelle d'un punto generico, ponendo $\varphi = o$.

Anzichè eliminare φ conviene determinare le singole coppie dei valori $x\,y$, e quindi la curva, facendo variare l'angolo φ fra certi limiti determi-

nati da un primo e schematico disegno dell'apparecchio.

51. *Dinamometro del Poncelet.* — L'organo essenziale del dinamometro del Poncelet è costituito da due molle rettangolari di sezione costante, ciascuna delle quali è munita d'apposito gancio per inserire l'apparecchio nella linea d'azione della forza (fig. 51). In una di tali molle è fissato il quadrante munito di un indice, a guisa di una lancetta d'orologio, fatto agire da una piccola asticina fissata all'altra molla, cioè con un meccanismo analogo a quello descritto al N. 31.

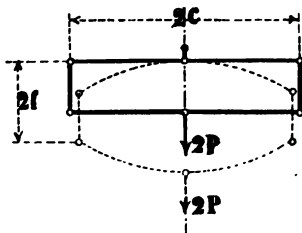



Fig. 51.

52. *Dinamometro Kreidl.* — Nel dinamometro della casa Alois Kreidl, l'organo principale è una doppia molla a balestra (fig. 52).

L'apparecchio indicatore è formato dall'unione di due meccanismi semplici già studiati ai N. 31 e 33.

La graduazione, quasi completa su di una circonferenza è centrata col rocchetto *O*, il cui movimento angolare è fornito da un arco dentato imperniato in un punto presso la graduazione stessa. Il tutto è rinchiuso in una scatola cilindrica fissa ad una delle molle a balestra. Il movimento angolare dell'arco dentato è dato da una biella, imperniata all'altra molla e che funziona come il meccanismo esaminato al N. 33.

Lo spostamento (fig. 53) di una delle molle rispetto all'altra, prodotta dalla forza, viene quindi moltiplicato secondo il coefficiente:

$$k_x = k \frac{R}{r} \cdot \frac{l}{r_1}$$

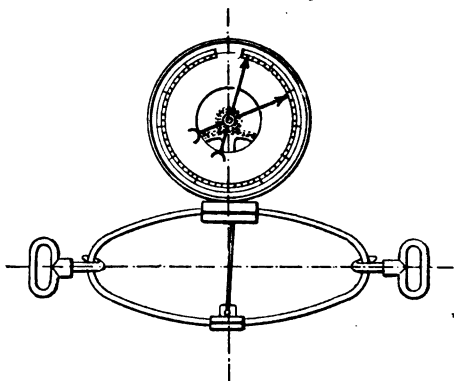



Fig. 52.

dove:

k — è un apposito coefficiente che tien conto della lunghezza della biella;

R — il raggio dell'arco dentato moltiplicatore;

r — il raggio del rocchetto;

l — la lunghezza dell'indice indicatore.

53. *Dinamometro Schaeffer-Budenberg.* — La doppia molla a balestra rappresentata schematicamente dalla fig. 16 e sollecitata a trazione lungo l'asse *a a'* è utilizzata nel dinamometro della casa Schaëffer e Budenberg (fig. 54).

Queste due molle riunite saldamente fra loro nei punti su cui esse attraversano l'asse $a a'$, presentano una sezione rettangolare sempre più allungata e di altezza decrescente per modo da presentare una forma di massima larghezza nella sezione corrispondente all'asse $b b'$: la fig. 54 oltre a rappresentare la sezione di gran parte dell'apparecchio, rappresenta la sezione della molla passante per l'asse $a a'$, e quindi la variazione del profilo in larghezza di una delle molle.

Fig. 53.

Due robusti anelli a cui fanno capo altri due, che servono ad inserire l'apparecchio nella linea di trazione o d'azione della forza, servono a sollecitare la doppia molla. Questi due anelli si prolungano all'interno con due appendici, che servono a guidare e mantenere gli assi degli anelli lungo la linea d'azione della forza.

Ad una di queste appendici è fisso un piccolo sopporto o braccio, terminante con una scatola cilindrica nella cui faccia esterna è segnata una graduazione. Nella parte centrale del sopporto è collocato un rocchetto situato in corrispondenza dell'appendice dell'altro anello, appendice a cui è fissa la cremagliera che completa la coppia d'in-

granaggi piani del macchinismo studiato al N. 32. All'estremità dell'asse portante l'ingranaggio, dal lato della scatola, e quindi nel centro della graduazione, è fissato un indice, che in posizione di riposo trovasi in corrispondenza dello zero della graduazione. L'azione della forza, allontanando i due anelli e facendo rotare l'ingranaggio, solidale ad una appendice, a mezzo della cremagliera, solidale all'altra appendice, sposta l'indice sulla graduazione. Le deformazioni della molla lungo l'asse *a a'* sono moltiplicate secondo il rapporto:

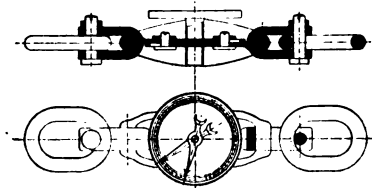



Fig. 54.

$$k_x = \frac{r_x}{r}$$

dove r ed r_x rappresentano, come sappiamo il raggio del rocchetto, e la lunghezza dell'indice.

La deformazione della molla avviene lungo una retta, e precisamente lungo l'asse *a a'* mentre lo spostamento dell'indice avviene lungo la circonferenza di raggio r_x.

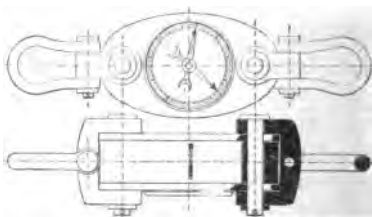



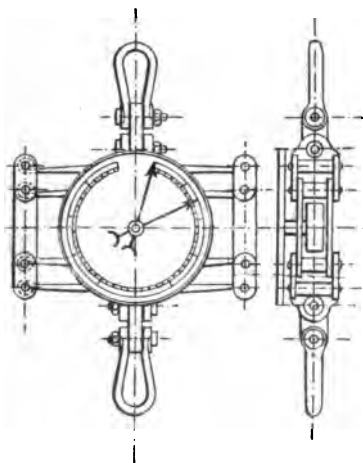
Fig. 55.

La casa Schaëffer e Budenburg costruisce anche un altro tipo di dinamometro rappresentato dalla fig. 55.

In ambedue i tipi vi è un secondo indice, il cui scopo vedremo in seguito (N. 55).

54. *Dinamometro della Casa Digeon.* — Con molle analogamente disposte a quelle del dinamometro del Poncelet, è costruito il dinamometro a quadrante della casa Digeon (fig. 56).

Fig. 56.

La differenza nelle molle consiste nel fatto che ognuna di queste è formata di due molle distinte e collegate alle estremità con tiranti piatti e snodati. Due solidi sopporti, muniti di relativi anelli, riuniscono le molle a due a due nei loro punti di mezzo, e servono ad inserire l'apparecchio nella linea d'azione della forza. Ad uno di questi sopporti è fisso il quadrante, mentre all'altro è collegato il meccanismo per far muovere l'indice. Il quadrante è pure munito di un secondo indice analogamente ad altri già esaminati, il cui scopo vedremo ora.

55. *Dinamometri a massima.* — I dinamometri semplici descritti precedentemente od analoghi, non lasciano traccia delle indicazioni fornite. Solamente quando la forza resta per un certo tempo costante è possibile notarne il valore, leggendolo sulla graduazione.

Negli altri casi, quando cioè la forza non è sensibilmente costante, sappiamo già che è bene sostituire ad un dinamometro semplice un dinamometrografo od un ergometro.

Tuttavia in molti casi, e specialmente quando è necessario conoscere il valore massimo della forza, e non il valore medio, i dinamometri semplici sono adoperati con vantaggio purchè lievemente modificati; con vantaggio per la loro semplicità ed il loro minor costo.

Immaginiamo aggiunto all'indice normale di un dinamometro, un secondo indice che ruoti attorno allo stesso asse del primo, ma che un congegno apposito gli permetta il solo movimento ascensionale lungo la graduazione. Tale indice si arresta sempre, come facilmente si comprende, in corrispondenza del valore massimo della forza che ha agito sul dinamometro. Questi allora prendono più propriamente il nome di *dinamometri a massima.* Il secondo indice indicato nei tipi precedenti rappresenta precisamente quell'indice che li trasforma in dinamometri a massima; tuttavia qualunque altro può essere ridotto a dinamometro a massima coll'aggiunta del secondo indice, opportunamente disposto.

§ 2. Dinamometrografi di trazione.

56. *Dinamometrografi di trazione.* — Abbiamo già visto (N. 6) la ragione principale per cui ai semplici dinamometri vennero man mano sostituendosi i dinamometrografi. Molti e svariati sono i tipi finora ideati e costruiti della cui razionalità parleremo più innanzi (quando dalle loro indicazioni, sia grafiche che numeriche, dovremo dedurne i singoli risultati), per ora vediamo come sono costruiti i principali tipi. Il primo è quello del Morin che gli ha servito per la determinazione di molti coefficienti di attrito.

57. *Dinamometrografo del Morin.* — L'organo principale del dinamometrografo del Morin è costituito da due molle a balestra come quelle del dinamometro del Poncelet. Differiscono da queste ultime per essere non a sezione costante, ma variabile con una legge parabolica, per la ragione precisata ai N. 12-13. L'apparecchio registratore è formato di due parti essenziali:

1° della punta scrivente applicata all'estremo del meccanismo indicatore;

2° del movimento della carta proporzionale, secondo un rapporto costante o variabile fra limiti noti, allo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza.

I due meccanismi sono disposti per modo da fornire spostamenti normali fra loro, per cui la

rappresentazione grafica risulta un diagramma ortogonale.

La punta scrivente è rigidamente unita ad una delle due molle mediante un apposito braccio di prolungamento, mentre l'apparechio registratore è fissato all'altra molla ed è costituito di una serie di rulli (fig. 57-58), *A, R, R, R, B, B', C* che trascinano la striscia di carta in modo analogo a quello descritto al N. 35. Il moto al primo rullo è dato da uno dei meccanismi descritti ai N. 39 e 44, a seconda dei casi, ed il rapporto di proporzionalità varia, come abbiam di sopra accennato a seconda del meccanismo scelto.

Le figure sopracitate rappresentano uno dei tipi di dinamometrografi del Morin, nel quale il moto al primo rullo è fornito dal moto di una puleggia *P* e trasmesso alla ruota *D* solidale al rullo *C* a mezzo di un giunto cardanico e di una vite senza fine *V*. Il doppio giunto cardanico, devesi possibilmente disporre in modo da evitare il difetto di fornire una variazione fra il movimento della puleggia e della striscia di carta facendo in modo che risultino eguali i due angoli formati dall'albero intermedio cogli esterni, collegati, in primo colla puleggia motrice *P*, il secondo colla vite senza fine *V*.

In altri casi e nella maggior parte, il moto al primo rullo *C* è fornito da un apparecchio d'orologeria, per cui è applicabile solamente [N. 40], allorchè la forza si muove di moto uniforme, come il movimento d'orologeria.

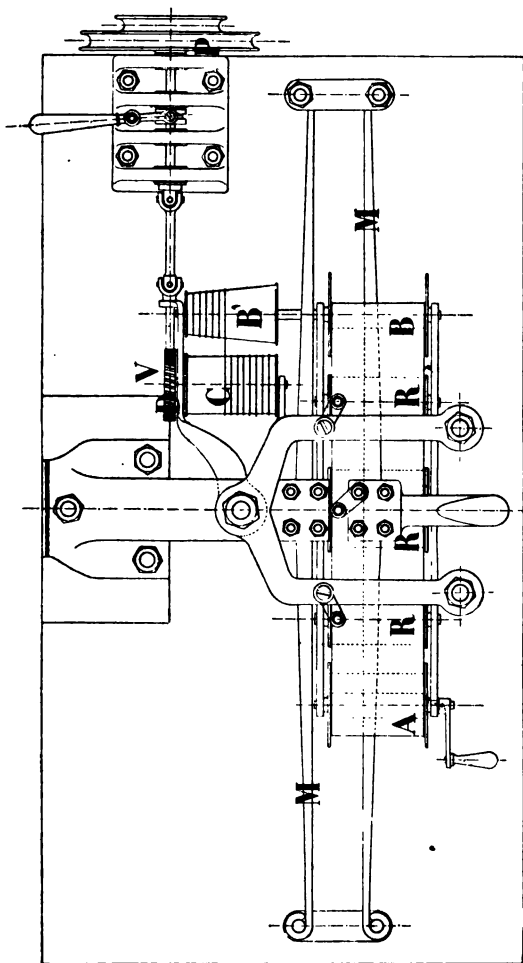



Fig. 57.

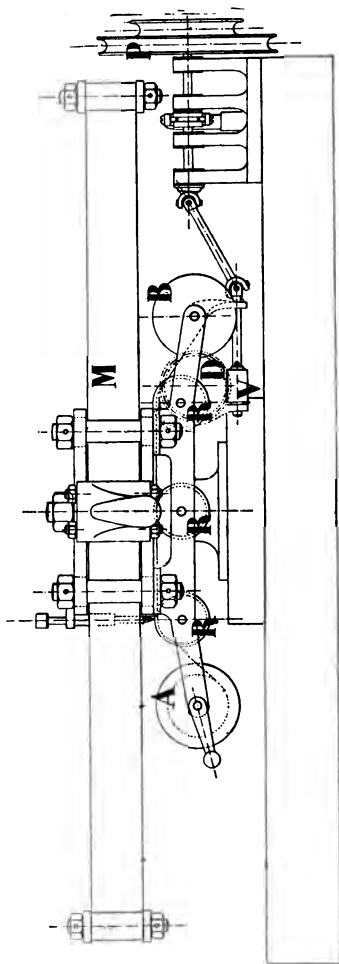



Fig. 58.

Nei migliori tipi inoltre, alla punta scrivente è aggiunta un'altra punta per precisare la linea di base del diagramma, cioè quella linea che seguirebbe la comune punta scrivente se la forza non agisse sul dinamometrografo pur svolgendosi egualmente la carta. Tale punta, come è naturale, è rigidamente collegata all'incastellatura portante i rulli.

58. *Dinamometrografo Sack - 1° tipo*. — La casa Sack ha costruito due tipi distinti di dinamometrografi. Il primo modello (fig. 60), ha per organo principale una molla a spirale conica

(fig. 24) racchiusa in un esagono (fig. 59) di cui

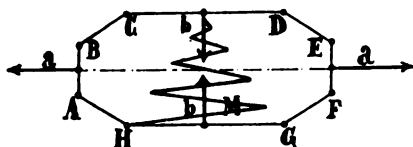



Fig. 59.

due lati opposti tendono ad avvicinarsi mentre i

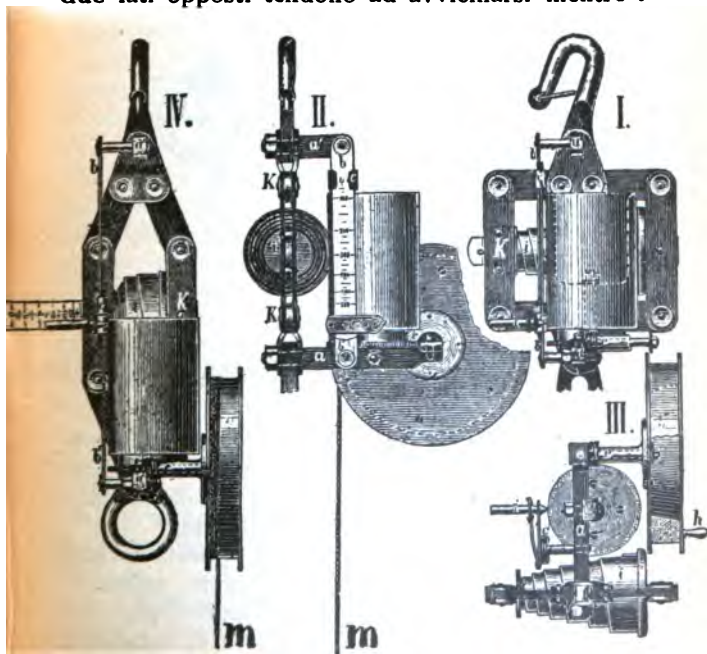



Fig. 60.

vertici allineati parallelamente ad essi s'allontanano sotto l'azione della forza che deve essere misurata. I lati dell'esagono che non sono a contatto colla molla, aventi il loro vertice sull'asse *a a* sono collegati a cerniera a due piastre *A*, *B*, *E*, *F*, seguite da un anello e da un gancio per inserire l'apparecchio nella linea d'azione della forza.

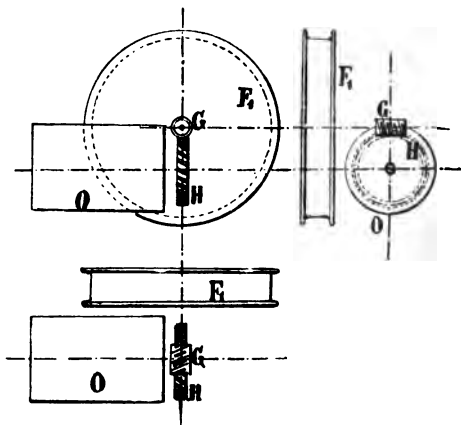



Fig. 61.

A queste due piastre sono pure collegate due colonnette *a*, *a'*, all'estremità delle quali sono assicurate due piastrine *b*, *b'*, moventesi parallelamente all'asse *a a* e guidantesi l'una coll'altra.

La piastrina *b* porta all'estremità opposta del suo punto d'attacco coll'esagono una punta registratrice, mantenuta aderente ad un cilindro *O* [fig. 61] da una molla, cilindro avente l'asse di rotazione

parallelo all'asse *a a*. Su questo cilindro si fissa la carta che deve ricevere le registrazioni della intensità della forza a mezzo della punta registratrice suddetta. Il cilindro *O* riceve un movimento proporzionale o quasi (vedremo in seguito N. 100 la ragione) allo spazio percorso dal punto di applicazione della forza, a mezzo di una funicella *m* [tenuta salda al suo estremo ad un punto fisso, mentre l'apparecchio si muove seguendo la linea d'azione della forza] svolgentesi dalla ruota a gola F_1 con moto linearmente proporzionale al moto del punto d'applicazione della forza. Per effetto dello svolgersi della fune *m*, la ruota a gola F_1 assume un moto rotatorio che trasmette a mezzo della vite senza fine *G* e dell'ingranaggio *H* al cilindro *O*. Per quanto abbiamo visto ai N. 42 e 100 il moto dell'estremo libero della fune, rispetto all'apparecchio, pur essendo esattamente eguale a quello percorso dal punto d'applicazione della forza, pure non resta sempre tale, ma cambia ad ogni strato di funicella svolgentesi da F_1. Inoltre tale variazione può assumere anche maggiore irregolarità poichè difficilmente la funicella si dispone a strati uniforme nell'apposita gola della ruota F_1.

Il diagramma ottenuto, spostandosi la punta scrivente e la carta di movimenti in direzioni normali, è ortogonale, ma di lunghezza non maggiore della circonferenza del cilindro *O* su cui è fissata la carta.

59. *Dinamometrografo Sack, 2° tipo.* — Il secondo tipo (fig. 62-63) di dinamometrografo Sack

utilizza, come organo principale, due molle a balestra le quali tendono a raddrizzarsi quando sono cimentate dalla forza da misurare nella direzione $a\,a'$ (fig. 16). L'inserzione nella linea d'azione del dinamometrografo si ottiene a mezzo di un gancio anteriormente e di un anello posteriormente, i cui prolungamenti di tali organi di presa sono fissati solidamente agli estremi delle molle con bulloni.

Le deviazioni della molla nel senso normale all'asse $a\,a'$ sono trasmesse ad un asse collocato nel punto medio di esse molle, ed è prolungato lungo un piano diametrale da due alette a guisa di piccole manovelle; normalmente al piano diametrale l'asse stesso ad una sua estremità si ripiega per risultarne normale. Quest'ultima parte fa funzione pure da manovella ed è di dimensioni maggiori delle precedenti per servire da leva moltiplicatrice. Le due più corte sono collegate alle due molle nel loro punto di mezzo mediante due piastrine b_1, b_1', funzionanti da bielle.

La manovella b alla sua estremità è munita di un indice scorrente in un piano parallelo $a\,a'$ in vicinanza di un arco D graduato fissato all'incastellatura dei rulli; questa è rigidamente unita al prolungamento dell'anello di trazione nella parte interna alle molle, mediante un perno ed un bullone.

L'incastellatura sostiene un rullo O, che, rotando, fa svolgere la carta su cui verrà descritto il diagramma, mediante l'attrito del rullo stesso e la pressione esercitata su di esso da due piccoli ci-

Fig. 62.

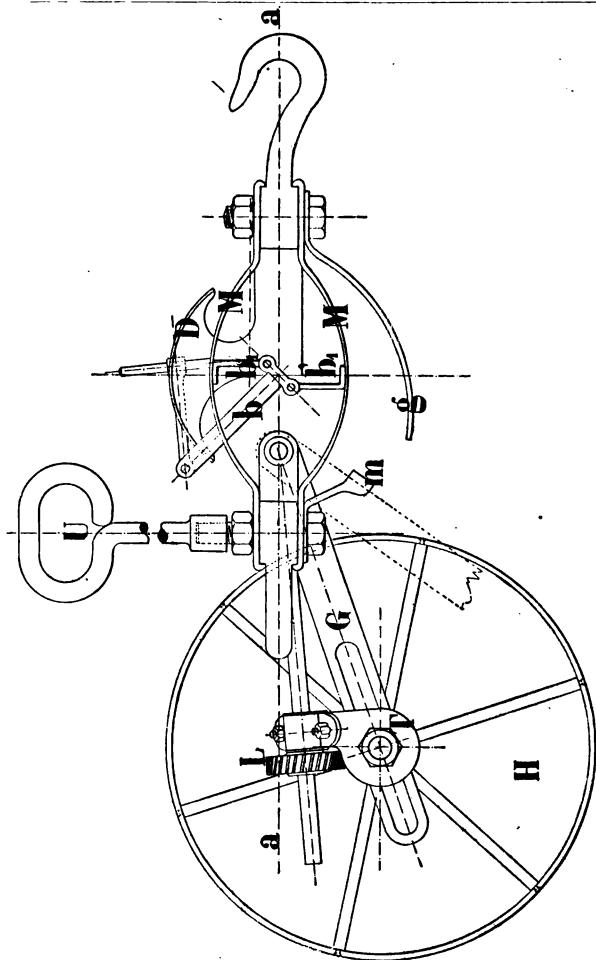



Fig. 63.

lindri compressori O_1 O_1. Tale movimento è identico a quello esaminato al N. 36 quantunque la posizione del rullo O_2 sia rotata di 90° rispetto alla disposizione generale.

La manovella *b* si prolunga oltre l'indice con un pernio che serve a far muovere, mediante una biella, la punta registratrice *P* sulla generatrice superiore del cilindro *O*. La punta registratrice può essere spostata in modo da variare la sua posizione e la posizione della biella che la sostiene per quanto abbiamo visto al N. 29. In seguito vedremo inoltre l'importanza di potere ottenere questo spostamento.

Il movimento del rullo *O*, che dovrebbe spostarsi di moto eguale a quello del punto d'applicazione della forza, come vedremo, è dato da una ruota *H* (fig. 62-63), svolgentesi sul terreno e che trasmette il suo moto angolare mediante una vite senza fine *K* ed un ingranaggio *L* (N. 41) al giunto cardanico unito al cilindro stesso. L'insieme del gruppo d'ingranaggi e ruota *H* è sostenuta mediante il pezzo *G*, a cui è possibile ruotare attorno al pernio che lo sostiene, per permettere alla ruota *H* di toccare il terreno per qualunque posizione della linea *a a'* d'azione della forza. Nel pezzo *G* è praticata una scanalatura per poter spostare la ruota *A* lungo il pezzo stesso, e fissarla nella posizione più conveniente; l'asse *N* del giunto cardanico è di forma quadrata per ricevere il moto dall'ingranaggio *L* per qualunque posizione della ruota *H* e gruppo d'ingranaggi relativi.

Un arresto *m*, infine, impedisce che l'asse del giunto cardanico assuma posizioni formanti coll'asse *a a'*, e quindi coll'asse del cilindro *O* che gli è parallelo, angoli maggiori di un limite assegnato e determinato per cui il funzionamento del giunto cardanico darebbe variazioni di moto di essi troppo elevate al variare uniforme del moto dell'altro asse.

Con tale apparecchio si possono avere due rapporti per lo svolgimento della carta, cambiando la ruota *H*, di cui ogni apparecchio è munito. La fondita in un sol pezzo della vite senza fine col mozzo della ruota *H*, obbliga a munire l'apparecchio di due o più ruote, a seconda del numero dei rapporti che si vuole avere a propria disposizione, mentre sarebbe stato molto meno ingombrante potere cambiare solamente la coppia d'ingranaggi.

60. *Dinamometrografo della casa Schaeffer e Budenberg.* — Nel dinamometrografo (fig. 64-65) costruito dalla casa Schaeffer e Budenberg l'organo principale è analogo al precedente, ma a sezione rettangolare costante. I pezzi di collegamento delle molle anzichè prolungarsi per formare l'anello ed il gancio, si collegano a mezzo di passanti a due anelli snodati che servono per inserire l'apparecchio nella linea di azione della forza. In condizioni normali di lavoro però le molle sono disposte in senso normale a quelle del dinamometrografo Sack secondo tipo, posizione riferita al piano verticale passante per la linea d'azione della forza.

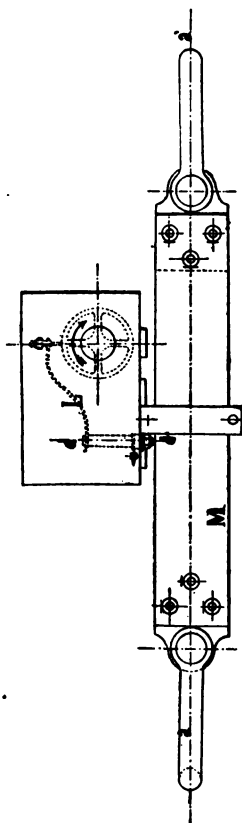



Fig. 64.

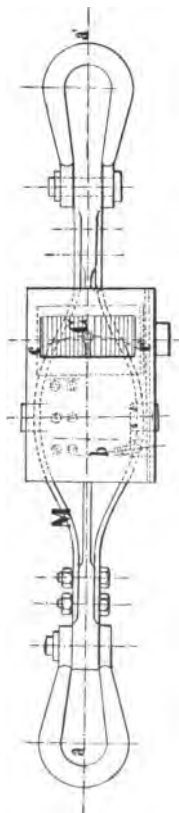



Fig. 65.

L'apparecchio registratore, a cui è unita l'ultima parte dell'apparecchio indicatore, compresa la punta registratrice, è racchiuso in una scatola, fissa alla parte mediana di una delle due molle. Il movimento del meccanismo indicatore, mediante una biella ed una corta manovella il cui centro di rotazione trovasi sull'asse della scatola, è ottenuto dallo spostarsi dell'altra molla nel senso normale all'asse $a\,a'$, quando la forza agisce nella direzione di quest'ultimo. All'estremità superiore del perno di rotazione della manovella corta, è fissata una manovella lunga L, la cui direzione è normale alla manovella corta e sostiene la punta registratrice.

Tale punta descrive un arco $c\,c'$ sotto al quale trovasi la carta disposta su di un tamburo che ruota di moto uniforme, moto impressovi da un congegno d'orologeria che si può fare azionare od arrestare a tempo opportuno, cioè allorchè si vuole fare funzionare l'apparecchio.

Risulta chiaramente che il diagramma di lunghezza non maggiore della circonferenza del tamburo C, non è riferito a due assi normali rettilinei, ma a due assi normali di cui uno, quello che rappresenta le forze, circolare.

Il rapporto k_x fra le deformazioni delle molle e delle ordinate descritte dalla punta registratrice è fornita dalla formula del N. 31:

$$k_x = k\frac{r_x}{r}$$

nella quale s'intende che r_x ed r rappresentano

le proiezioni delle due manovelle L e corta su di un piano normale all'asse $a\,a'$ e k il noto coefficiente moltiplicatore nella trasmissione di un movimento rettilineo in angolare.

Anche qui conviene tener presente che l'ampiezza dell'angolo compresso fra le posizioni estreme della manovella L e manovella corta è subordinato alle condizioni considerate al N. 31.

61. *Dinamometrografo « Federazione »*. — Il dinamometro « Federazione » (fig. 67-68-69) possiede

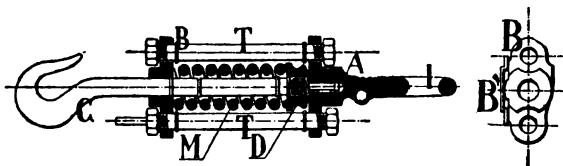



Fig. 66.

per organo principale una molla a spirale cilindrica *M*, contenuta fra una robusta intelaiatura di ferro *A B T T* (fig. 66). La detta molla si deforma per compressione fra la piastra *B* dell'intelaiatura ed un dado *D* fissato con vite e spina conica (o spina a vite) ad un'asta centrale terminata, dalla parte della piastra *B*, con un robusto gancio. Tale gancio e l'anello [che forma un sol pezzo colla piastra *A* dell'intelaiatura] servono ad inserire l'apparecchio nella linea d'azione della forza. Gli spostamenti rettilinei, proporzionali linearmente alla intensità della forza della molla vengono trasmessi alla punta registratrice mediante due bielle ed una leva (vedi n. 28, fig. 27) che

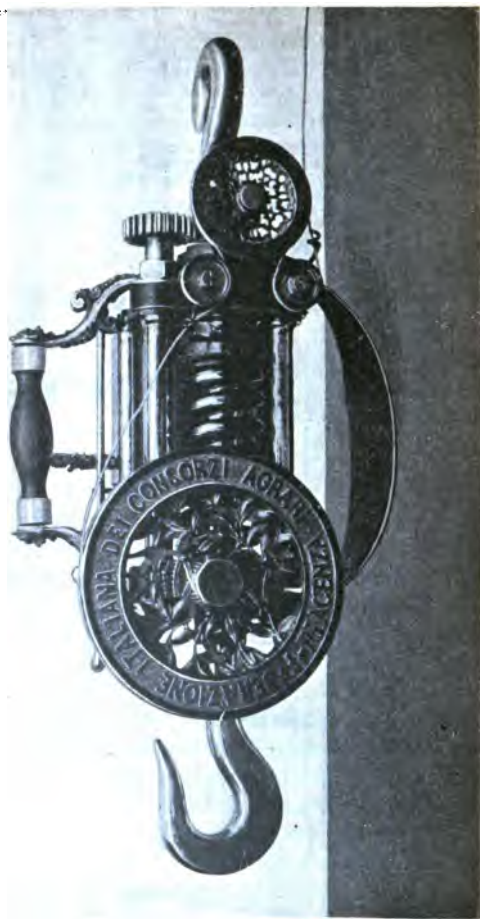



Fig. 67.

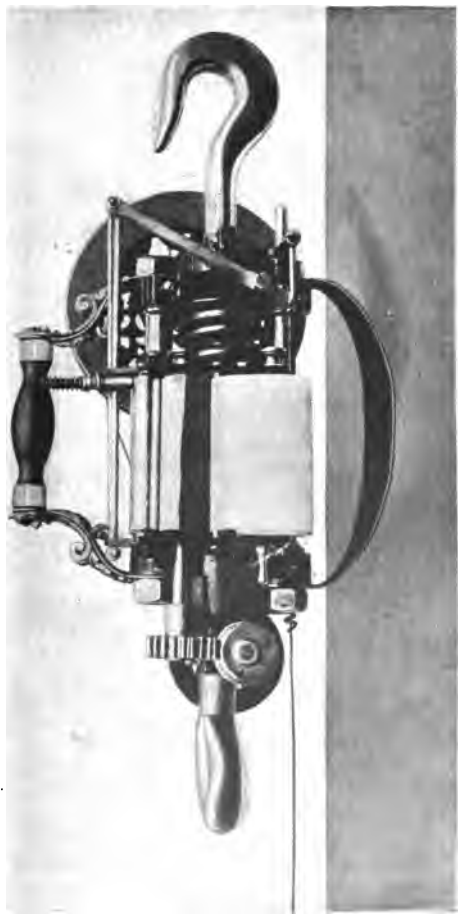



Fig. 68.

serve a moltiplicare le deformazioni della molla secondo il rapporto:

$$k_x = \frac{R}{r} .$$

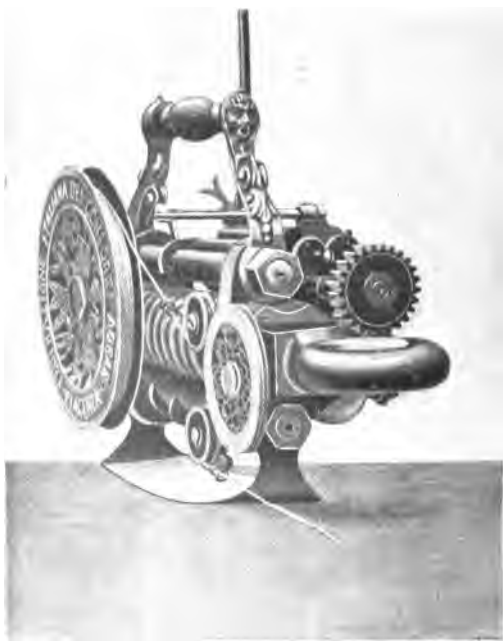



Fig. 69.

Tale sistema, come sappiamo (N. 28) non altera le deformazioni della molla dopo la loro moltiplicazione per k_x, quando è disposto per modo da soddisfare alle condizioni di parallelismo delle bielle b_1 e b_2 e dell'egual rapporto di queste con quelle dei bracci R ed r in cui il fulcro O della leva l divide la leva stessa.

Per ottenere la prima di dette condizioni, giacchè la seconda dipende dalla costruzione esatta, la leva l è fissata non alla piastra B, ma ad un sopportino B^1, (fig. 66) mobile rispetto a B, che permette di regolare in posizione esatta il sistema moltiplicatore.

La punta registratrice si muove parallelamente all'asse $a\,a'$ lungo la generatrice superiore di un rullo O che trascina (N. 36 fig. 37) la striscia di carta svolgentesi dal rullo O_2 di moto esattamente proporzionale allo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza.

Il movimento della carta a mezzo del rullo O, è assicurato da due rulli compressori O_1, O_1, e dal rullo di rimando O_3 che obbliga la carta ad aderire a molta parte della superficie del rullo O. Il moto di questo rullo è fornito dal meccanismo esaminato al N. 44 fig. 43 le di cui proprietà forniscono l'esatta proporzionalità fra lo spazio e la carta svolta, proporzionalità necessaria, come vedremo in seguito.

A tale apparecchio si possono applicare diverse molle per ognuna delle quali è fissato il massimo, e ciò per ottenere ordinate rappresentanti lo sforzo con massime lunghezze compatibili colle

dimensioni dell'apparecchio. Naturalmente non si dovrà applicare molle il cui massimo sforzo, per la normale deformazione scelta per ognuna, oltrepassi il limite massimo per cui fu calcolata, come pure non si dovrà adottare molle il cui massimo sia inferiore ad un certo limite perchè il peso stesso dell'apparecchio non influenzi la molla stessa.

Fig. 37.

Il diagramma ottenuto con tale apparecchio è ortogonale, poichè la carta e la punta scrivente si muovono in direzioni normali.

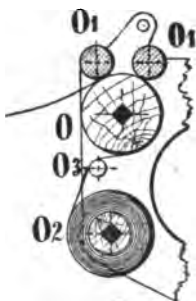
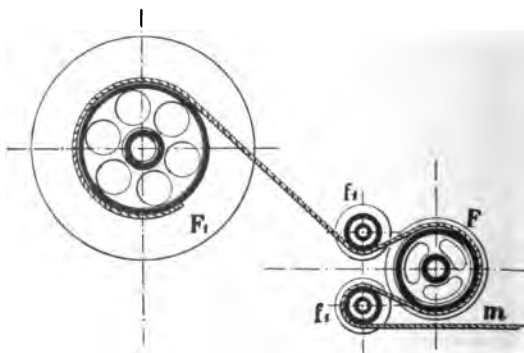



Fig. 43.

62. *Dinamometrografo Kraft-Rost.* — L'organo principale del dinamometrografo costruito dalla casa

Kraft-Rost è analogo a quello del dinamometrografo Sack e Schaëffer e Budenberg; schematicamente è rappresentato dalla fig. 16, e l'insieme dalla fig. 70.

L'inserzione di tale doppia molla a balestra, si ha mediante anelli e ganci supplementari.

Alla molla superiore è rigidamente collegato, a mezzo dei bulloni, nella sua parte centrale una incastellatura formata da due piastre, all'una delle quali si può fissare delle striscie di carta aventi la forma di settore circolare, sulla quale appositi meccanismi tracciano il diagramma quando l'apparecchio funziona.

Nel centro di tale settore circolare è disposto una leva a squadra a bracci disuguali, il più corto dei quali riceve un movimento rotatorio da una biella fissa alla molla inferiore, che trasforma quindi le deformazioni rettilinee della molla in angolari; il braccio più lungo invece porta l'apparecchio registratore.

L'apparecchio funzionerebbe in modo analogo a quello del dinamometro della casa Schaeffer e Budenberg, qualora la carta predetta, anzichè essere fissa all'incastellatura generale, si muovesse di moto eguale al moto del punto d'applicazione della forza, e la punta registratrice fosse fissa all'estremo della leva lunga; invece le operazioni si capovolgono, giacchè in questo dinamometrografo la carta sta ferma, e la punta scrivente si muove di moto uniforme lungo l'apposita fenditura praticata nella leva lunga. Il movimento uniforme alla punta scrivente è dato da un apposito

congegno di orologeria, che si può far funzionare a tempo opportuno.

In tale dinamometro il diagramma è polare riferito ad un polo che coincide con il centro della

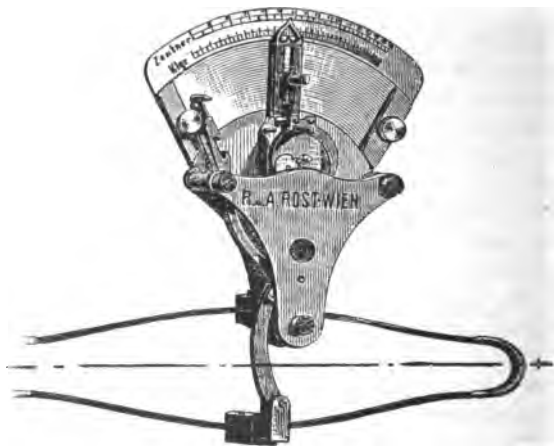



Fig. 70.

leva a squadra e ad una retta passante pel polo stesso. Le ordinate che, in una data scala, rappresentano, moltiplicate secondo il noto rapporto:

$$k_x = k \frac{r_x}{r},$$

le deformazioni delle molle, e, per conseguenza le forze, sono circolari.

Il rapporto suddetto varia da istante ad istante, poichè la punta registratrice si muove lungo i raggi del settore, per cui (r_x essendo variabile) il diagramma trovasi in condizioni ben diverse da quelle di un diagramma ottenuto col dinamometrografo Schaeffer e Budenberg, nel quale le ordinate che rappresentano la forza sono pure circolari.

Tuttavia potremo ricondurre il diagramma ottenuto con un dinamometrografo Kraft-Rost nelle condizioni di un diagramma ordinario, qualora fosse facile immaginare e trasformare l'azione angolare della leva lunga, come se essa avesse agito col centro a distanza infinita, cioè fare in modo che tutte le rette radiali partenti dal polo, divenissero parallele.

Tale operazione essendo troppo complicata, od almeno laboriosa, si preferisce considerare come ordinata, rappresentante in una data scala la forza, l'angolo medio di tutte le posizioni che la leva ha assunto durante il funzionamento dell'apparecchio con una posizione iniziale. Le deviazioni lineari della molla dovuta alla forza, si trasformano in una deviazione angolare, la quale rappresenta con sufficiente esattezza la forza, quando siano verificate le condizioni poste all'uopo al N. 31.

§ 3. Ergometri di trazione.

63. *Ergometri di trazione.* — Questi apparecchi sono tutti fondati sul meccanismo esaminato al N. 45 fig. 44; essi per conseguenza forniscono il lavoro di una forza agente lungo uno spazio a meno di una costante propria di ogni apparecchio. Vedremo in seguito quali sono le condizioni alle quali devono soddisfare perchè il lavoro da essi misurato sia esatto; per ora esaminiamoli nella loro forma e nel loro funzionamento.

64. *Ergometro con movimento a mano.* — Il più semplice di tali apparecchi è quello rappresentato dalla fig. 71-72. In questo apparecchio una unica incastellatura metallica mantiene nelle relative posizioni tanto il cilindro *D* quanto il disco *C*. La forza, agendo lungo l'asse di una lunga molla a spirale cilindrica, la deforma per compressione e trascina con sè il cilindro *D* lungo un diametro del disco *C* il cui asse è normale all'asse del cilindro *D*. Il movimento al disco *C* è fornito dal moto dato ad una grande puleggia a gola d_1, collegata ad una piccola di diametro d_2, mediante una funicella.

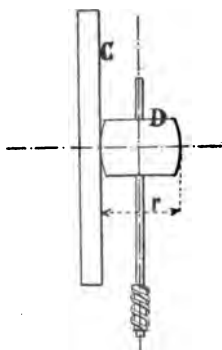



Fig. 44.

Perchè il lavoro misurato dall'apparecchio mediante un numero ad esso proporzionale, rappresenti esattamente quello prodotto dalla forza, è

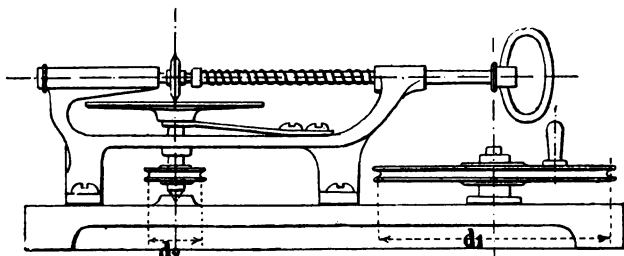



Fig. 71.

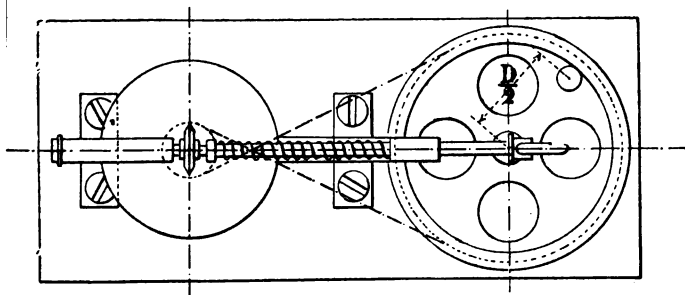



Fig. 72.

necessario che la velocità del disco *C* sia proporzionale allo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza. Se la forza, ad esempio, è quella

che deve vincere la forza di trazione di un veicolo, la velocità di *C* deve essere esattamente proporzionale, secondo un noto rapporto, alla velocità lineare del veicolo, come pure alla velocità angolare di una puleggia che serva a trasmettere il moto ad una macchina, od a più macchine.

Occorre quindi mantenere, a mano, un movimento sincrono del disco *C* al movimento o della ruota del veicolo o della puleggia, a secondo dei due casi precedentemente citati, a guisa d'esempio. Ma tale movimento sincrono è difficile ottenerlo a mano, per cui il Morin per primo, poi il Bental, trasformarono l'apparecchio sostituendo il moto a mano del disco *C* con un moto ottenuto meccanicamente.

65. *Ergometro del Morin.* — L'apparecchio del Morin modificato nel senso sopra indicato è rappresentato dalla fig. 73-74.

Il Morin, però, alla molla a spirale cilindrica ha sostituito la doppia molla a balestra già adoperata nel dinamometrografo di trazione di cui porta il nome e descritto precedentemente (N. 57).

Il Morin nel modificare l'apparecchio ha avuto di mira di adoperarlo nella misura del lavoro occorrente alla trazione di un veicolo su di una strada, sia essa ordinaria o ferrata.

Per questo il movimento al disco *C* viene trasmesso, mediante una funicella, da una puleggia a gola fissata ad una ruota del carro stesso. Poichè la ruota per la trasmissione non è sempre dello stesso diametro, converrà preparare una

tabella in cui si abbiano i vari valori della costante per i singoli valori dei diametri delle ruote che in pratica si possono incontrare.

È da notare però, che il cilindro *D*, per i continui urti che riceve e specialmente per le brusche ed ampie variazioni della intensità della forza, non funziona bene, e, quindi, l'apparecchio non può fornire osservazioni attendibili. Per queste ragioni gli ergometri integratori, di comodissimo e praticissimo uso, non sono entrati nell'uso pratico, quantunque M. M. Easton e Anderson della Società Reale d'Agricoltura inglese, abbiano munito l'apparecchio integratore da loro costruito di un ammortizzatore a stantuffo.

Essi si possono, per conseguenza, usare utilmente solo quando la forza agente lavora senza causare l'inconveniente dianzi accennato.

La formula, che fornisce il lavoro, indicando con α la variazione della costante dovuta alla ruota del carro, a cui si fissa la puleggia motrice dell'apparecchio, e che si deduce caso per caso dalla tabella predetta di cui deve essere fornito ogni apparecchio, diventa:

$$L = \alpha K n''$$

$$C = \alpha K_1 \frac{n''}{t}$$

dove K è sempre eguale al valore trovato al N. 45.

66. *Ergometro del Bentall.* — L'apparecchio od ergometro integratore del Bentall, informato sempre agli stessi principi dei precedenti e di cui ha

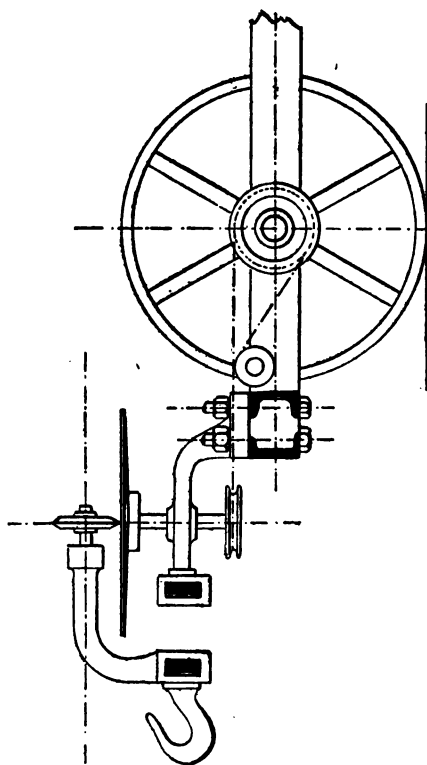



Fig. 73.

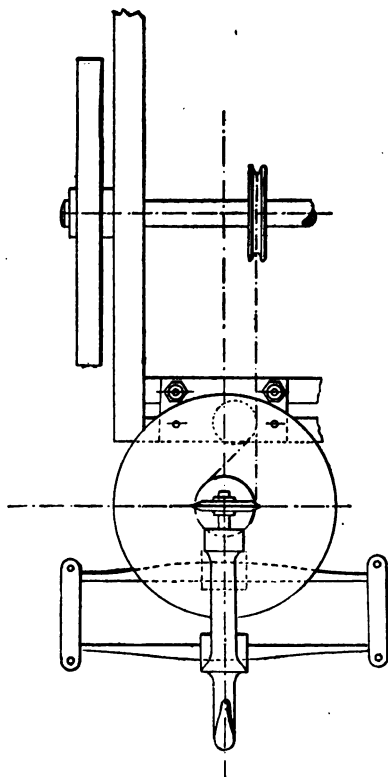



Fig. 74.

conservato gli stessi diffetti, che al pari degli altri l'hanno reso non pratico, è rappresentato dalla fig. 75-76.

Il Bentall ha trasformato il primo tipo esaminato in modo da misurare lo sforzo di trazione

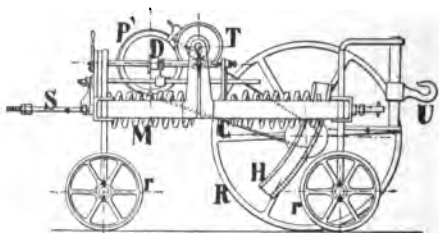



Fig. 75.

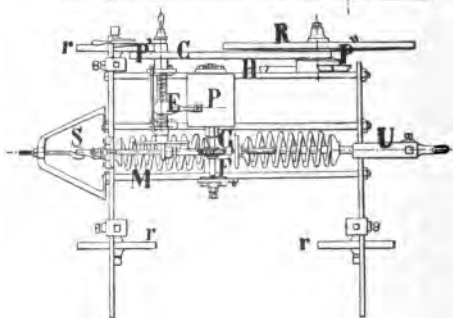



Fig. 76.

di qualunque macchina, interponendolo nella linea d'azione.

L'organo principale è la riunione di due molle a spirale cilindrica, cimentate ambedue a compressione dalla stessa asta centrale, fra piastre di ritegno e la intelaiatura generale.

Questa sopporta tutti gli organi accessori, ed è mantenuta in una posizione ben determinata da quattro ruote, di cui una di diametro maggiore delle altre. Queste ruote non sono rigide all' intelaiatura, ma sono rigide a delle aste quadrate, che possono spostare in altezza il carrello fino a permettere che l'asse delle due molle coincida con la linea di tiro. La ruota maggiore a differenza delle altre tre minori, si sposta in altezza mediante un sopporto che si fissa ad una guida circolare, il cui centro coincide con l'asse di una puleggia che serve a mettere in moto gli apparecchi registratori. Il movimento a questa puleggia, è dato, mediante cinghia, da un'altra puleggia coassiale colla ruota portante di grande diametro.

Parallelamente all'asse delle molle e nel piano verticale passante per l'asse stesso, si sposta un'asta di quantità eguali alle deformazioni delle molle, e trascina con sè il cilindro *D* a cui è possibile solo il movimento assiale sull'asta che lo sostiene. In posizione normale il cilindro *D* coincide col centro di un disco che ruota di moto esattamente proporzionale allo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza. Tale disco è fisso all'estremo opposto dell'albero portante la puleggia motrice sopra citata, albero che nella parte compresa fra i sopporti è filettata. È a quest'asse, come è facile comprendere, che è concentrica la guida per lo spostamento in altezza della ruota grande motrice.

Parallelamente all'asse della puleggia *P'* ruota un tamburo *T* di moto lento mediante ruota

senza fine *G* ed un ingranaggio elicoidale *H* fissato all'asta su cui scorre il cilindro *D*. Il movimento a quest'asse è dato dal cilindro *D*, il cui moto, come sappiamo (N. 45) è proporzionale non solo alla velocità del disco, ma al prodotto della velocità del disco e della intensità della forza che ha provocato lo spostamento del cilindro *D*. Sul tamburo *T* si fissa una striscia di carta tale da ricoprirlo completamente; carta che riceve le impressioni di una punta registratrice *P* moventesi assialmente al tamburo *T* di moto proporzionale allo spazio.

La determinazione del numero dei giri e quindi del lavoro la vedremo più innanzi nell'apposito paragrafo (N. 118).

Anche per quest'apparecchio si deve ripetere quanto si disse a proposito dell' Ergometro del Morin circa alla trasmissione del moto fra il disco *C* ed il cilindro *D*, N. 45, fig. 44. Trascurando, per ora, questa causa d'errore, l'ergometro integratore soddisfa alle condizioni richieste da un buon apparecchio, per la misura del lavoro di una forza, perchè la molla cilindrica fornisce deformazioni linearmente proporzionali alla intensità della forza che la deforma (condizione necessaria come vedremo) e la ruota *R* velocità proporzionali allo spazio, giacchè per il suo peso, ed il modo con cui è disposta è obbligata a rimanere sempre aderente al terreno, purchè la poca stabilità delle quattro ruote di sostegno, non alteri questa essenziale condizione.

§ 4. Dinamometri di rotazione.

67. *Dinamometri di rotazione.* — I dinamometri passati in rivista fin qui servono per la misura di forze agenti lungo traiettorie, che non sono chiuse, cioè tali che nessun elemento ritorna a passare periodicamente o no lo stesso spazio.

Quando invece la traiettoria è chiusa, e vi sono per conseguenza degli elementi rotanti coi quali i cingoli trasmettenti le forze vengono a contatto non è possibile la inserzione dei dinamometri già esaminati; in questo caso bisogna approffittare di condizioni speciali, come un corpo rotante intermedio, o la diversa tensione che i cingoli stessi presentano nei diversi loro rami. Avremo esempi di apparecchi utilizzanti le speciali condizioni di un corpo rotante intermedio in un appropriato rinvio di una trasmissione, appropriato perchè la contrastata torsione fra due sezioni distinte e vicine misurata mediante molle determina in un speciale indicatore segmenti proporzionali alla forza; esempi del secondo in apparecchi utilizzanti la diversa tensione fra due rami di un cingolo di trasmissione.

I dinamometri di rotazione, come sappiamo, possono anch'essi essere semplici, registratori od integratori; tuttavia alcuni dinamometri semplici hanno ricevuto l'appellativo di ergometri quantunque il lavoro lo forniscono solo se la velocità degli alberi di rotazione è costante e si determini

il numero dei giri; per questo classificheremo come dinamometri semplici alcuni detti ergometri.

68. *Dinamometro di White.* — Il White fu il primo ad immaginare un apparecchio adatto alla misura del lavoro di una forza trasmessa mediante

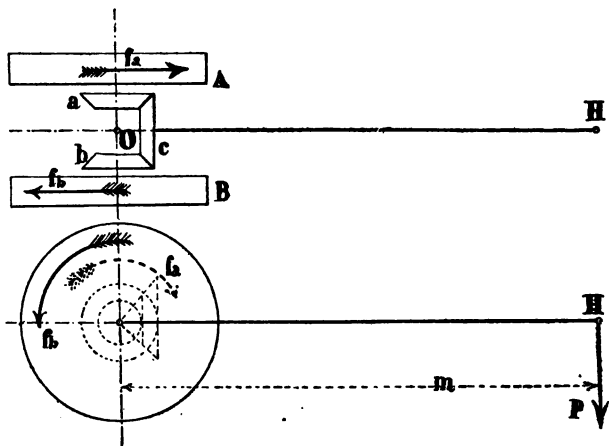



Fig. 77.

alberi rotanti. Esso si basa sul principio seguente. Interponiamo in un punto qualunque di un albero un apparecchio formato di due manicotti *A* e *B* (fig. 77) a cui sono fisse due ruote coniche *a* e *b*; immaginiamo collegate le due ruote *a* e *b* da una terza ruota conica *c* imperniata su di un braccio *O H* rotante attorno al punto *O*. È chiaro che il

manicotto A, rotante nel senso della freccia f_a determina forze tangenziali alle periferie delle ruote *a, c, b* tali che il manicotto B ruoterà nel senso opposto al manicotto A. La ruota conica intermedia c, quando è in movimento, trovasi soggetta alla potenza F diretta nel senso dal basso all'alto (fig. 77) ed alla resistenza, pure eguale a F, diretta nello stesso senso della potenza. La ruota c quindi si trova soggetta a muoversi verso l'alto

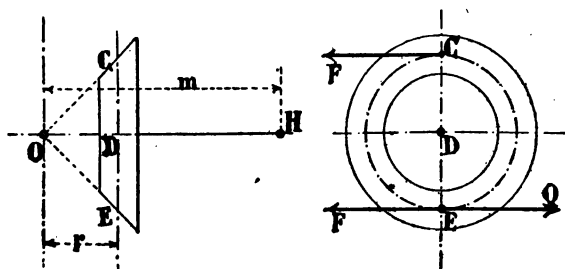



Fig. 78.

da una forza eguale a 2 F. Infatti se chiamiamo (fig. 77-88):

X — la forza che sollecita l'asse del pignone c nel suo punto D;
F — la forza tangenziale al rocchetto c nel punto E;
P — la forza agente sull'asse del rocchetto c, nel punto H, distante di m dall'asse delle due puleggie A e B;
r — la distanza della linea d'azione della forza X

dall'asse predetto; ponendo il centro di mementi in C, ed O, avremo:

$$CD . X = CE . F$$

da cui:

$$X = 2 F$$

essendo le ruote coniche a, b, c, di egual diametro; e per conseguenza:

$$F = \frac{1}{2} P \frac{m}{r} .$$

Se possiamo quindi determinare la forza P che mantiene il braccio OH allo stato prossimo al moto, avremo determinato la forza F, da cui si ricava facilmente il lavoro motore trasmesso dalla puleggia A alla B, come vedremo in seguito.

69. *Modificazione del dinamometro di White.* — La disposizione precedente ammette che si possa interporre in un punto dell'albero l'apparecchio rappresentato dalla fig. 77, quando la velocità di una delle due sezioni si possa invertire senza inconvenienti. Quando ciò non è possibile si può disporre l'apparecchio come rinvio fra l'albero che deve dare il movimento, e l'albero che deve riceverlo, collegandoli opportunamente con cingoli (fig. 79).

D'altra parte non è difficile modificare la disposizione delle ruote dell'apparecchio di White, per far sì che i due manicotti A e B ruotino nello

stesso senso. Infatti non devesi che sostituire alle

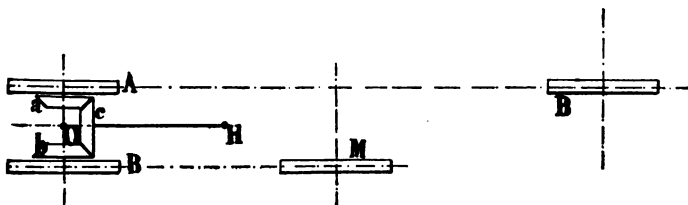



Fig. 79.

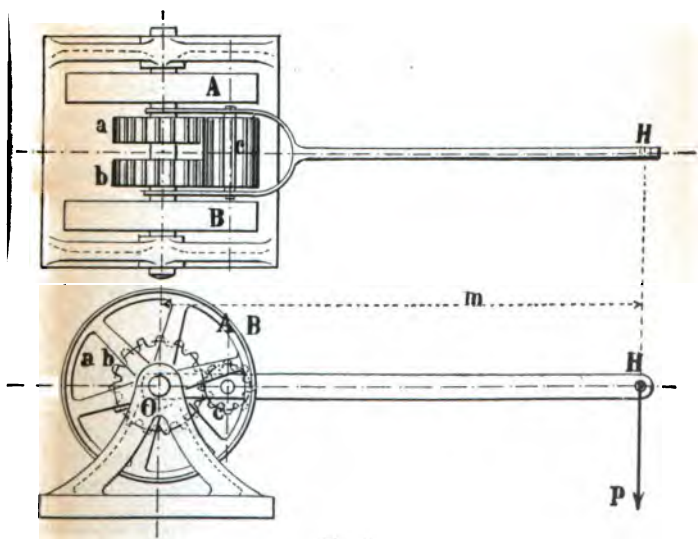



Fig. 80.

due ruote coniche *a* e *b* due ruote piane ed alla

c tre rocchetti piani. Indicando con c_1, c_2, c_3 questi tre rocchetti piani, possiamo disporre il meccanismo in modo che a ingrani con c_1, e successivamente c_1 con c_2, c_2 con c_3, e c_3 con b. In tal caso (vedi fig. 80), supposto che la forza mantenga in posizione fissa i rocchetti intermediari fra a e b e quindi anche il braccio che li sostiene, la ruota a trasmette alla b un movimento nello stesso senso.

Quest'apparecchio, come pure la modificazione che gli si potrebbe far subire, non è pratico se non quando la forza da trasmettere è costante, e si può misurare esattamente la forza P; ma quando ciò non è possibile, l'apparecchio non serve se non accoppiato con altri, ad esempio un dinamometrografo od ergometro di trazione.

70. *Bilancia dinamometrica.* — Immaginiamo sostituito in tre ingranaggi conici dell'apparecchio di White tre ingranaggi piani, non disposti come nella modificazione proposta per l'apparecchio stesso di White, ma nello stesso piano. Avremo la bilancia dinamometrica (fig. 81).

Indichiamo con F la forza che deve essere trasmessa dalla ruota a alla b mediante la ruota intermedia c, il cui asse supponiamo per un istante fisso. Avremo alla periferia di entrambe le coppie una forza tangenziale rivolta in basso, qualora la trasmissione avvenga nel senso indicato dalle freccie. Tali due forze agenti su linee d'azione equidistanti dal perno della ruota c, danno su questo perno una componente diretta nello stesso senso e di intensità doppia. Ne segue che la co-

noscenza della forza agente sul perno della ruota *c* fornisce la forza *F*. Per tale scopo, anzichè fis-

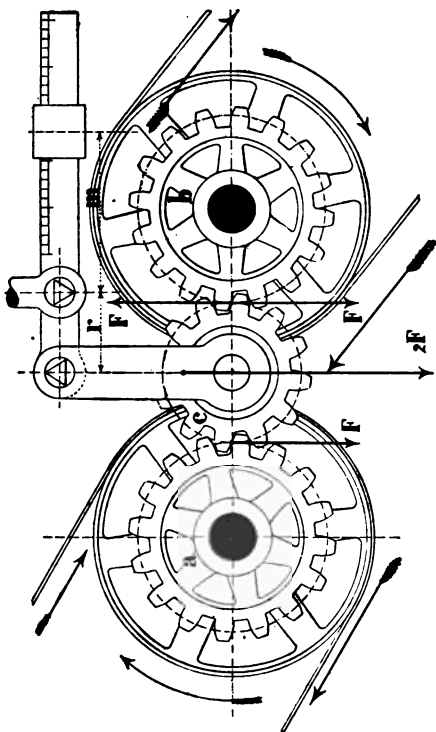



Fig. 81.

sare il suddetto perno della ruota *c* alla stessa incastellatura delle altre due ruote, si sospenda

al braccio corto d'una bilancia, e si determina la posizione d'equilibrio.

Indicando con:

P — il peso sul braccio della bilancia che

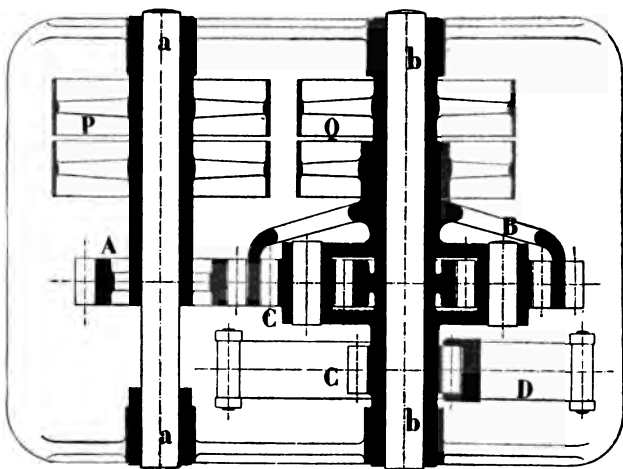



Fig. 82.

determina l'equilibrio con la forza agente sul perno della ruota c;

r — la distanza del fulcro della bilancia della linea d'azione della forza $2F$;

m — la distanza dal medesimo punto della linea d'azione del peso P;

Avremo:

$$2Fr = mP;$$

da cui:

$$F = P \frac{m}{2r}$$

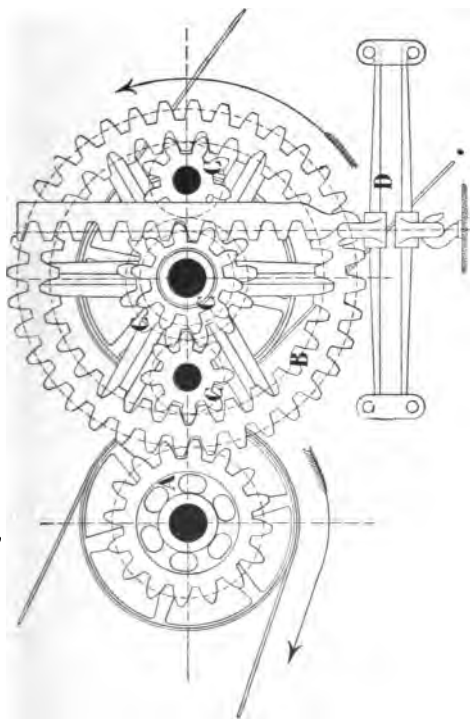



Fig. 83.

a meno che il valore di F sia fornito direttamente dalla graduazione della bilancia stessa.

Ottenuto il valore di F, possiamo avere il lavoro trasmesso da una puleggia all'altra, come vedremo nell'apposito capitolo.

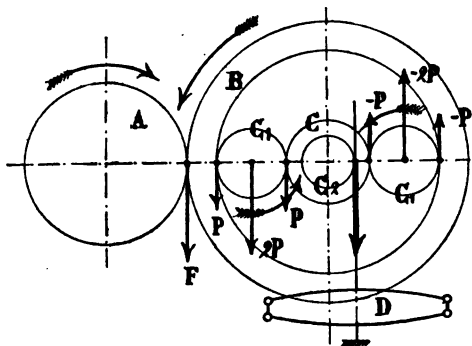



Fig. 84.

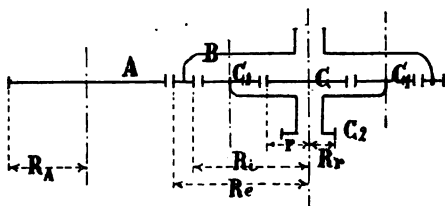



Fig. 85.

71. *Ergometro di Hartig.* — L'ergometro dell'Hartig (fig. 82, 83, 84, 85), è analogo al precedente; la ruota intermedia è sostituita da due

eguali simmetricamente disposte rispetto all'asse dell'apparecchio; la bilancia è sostituita da un dinamometro.

Sopra una robusta incastellatura mediante quattro sopporti sono sostenuti due alberi *a a*, *b b*; il primo mediante due puleggie, fissa e folle, ed un rocchetto *A* riceve il movimento dall'albero motore e lo trasmette all'asse *b b*; questo sopporta la ruota *B*, che, ricevuto il movimento dal rocchetto *A* lo trasmette attraverso ad un sistema di ingranaggi ad altre due puleggie, fissa e folle, collegate con un cingolo all'albero che deve ricevere il movimento.

Le figg. 84, 85 rappresentano schematicamente il sistema d'ingranaggi sopra citato. La ruota *B* è munita di due dentature, una esterna, per ricevere il movimento del rocchetto *A*, l'altra interna per trasmettere il moto alle due ruote intermedie, C_1, C_1 fisse al manicotto anteriore di sostegno delle ruote stesse (fig. 82).

La ruota *C*, collegata a mezzo dell'albero *b b* alla puleggia fissa *Q*, alla cui periferia agisce la resistenza, riceve il moto delle due ruote C_1 e C_2, che per un istante supponiamo rigide all'incastellatura dell'apparecchio.

Indicando con *P* lo sforzo trasmesso tangenzialmente alle ruote C_1, *C*, C_1 ed alla corona interna della ruota *B*, risulta chiaro che ognuna delle ruote C_1, è soggetta ad una forza $2\,P$ agente tangenzialmente alla circonferenza passante per i centri delle due ruote C_1, C_1 e centro in sull'asse *b b*, coincidente con quello della *B* e della *C*.

Ma le ruote C_1 e C_1 sono collegate alla ruota C_2 a mezzo di un manicotto per cui l'azione delle forze $2P$ reagisce sulla ruota C_2 che tenderà a muoversi nel senso in cui tenderebbe a ruotare le ruote C_1 e C_2. La resistenza che si deve opporre per impedire il moto della ruota C_2, opportunamente corretto degli sforzi dovuti agli attriti interni dell'apparecchio, fornisce il valore di Q da cui dedurre F agente tangenzialmente alla ruota A. Da questo valore, come vedremo, si ottiene il lavoro trasmesso mediante cingoli dall'albero motore all'albero mosso. La resistenza che si deve opporre alla ruota C_2 affinchè non ruoti unitamente alle C_1, C_1, è ottenuta mediante una cremagliera, fissa ad un punto della incastellatura di un dinamometro di trazione D.

Indicando con:

R_i — il raggio primitivo della corona interna della ruota grande B;

R_e — il raggio primitivo della corona esterna della stessa ruota;

R_A — il raggio primitivo della ruota A;

r — il raggio primitivo della ruota C;

R_r — il raggio primitivo della ruota C_2;

avremo:

$$F = Q \frac{R_i}{R_e} \frac{R_r}{R_i + r}$$

dove Q è il valore medio della forza che ha agito sul dinamometro durante l'esperienza.

72. *Dinamometro del Thomson.* — Il dinamometro di rotazione del Thomson si può applicare anch'esso alla misura dello sforzo trasmessa fra due alberi, inserendolo come albero di rinvio. In questo apparecchio però la trasmissione è assicurata, non da ingranaggi come nei precedenti, ma da una cinghia che collega opportunamente le due puleggie dell'apparecchio l'una ricevente e l'altra trasmettente il moto.

L'apparecchio (fig. 86) è costituito essenzialmente di due alberi paralleli riuniti da un'unica

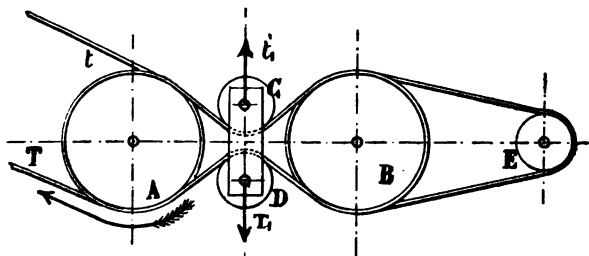



Fig. 86.

intelaiatura su cui sono fissate due puleggie *A* e *B*, collegate da una corta cinghia, mantenuta tesa dall'azione di due rulli *C*, *D*. Una puleggia coassiale alla *A* riceve il movimento dall'albero motore, mentre un'altra coassiale alla *B* trasmette il moto alla puleggia *E* fissa all'albero che riceve il movimento.

I due rulli C e D non sono fissi all'incastellatura dell'apparecchio, ma possono spostarsi nella direzione normale all'asse delle due puleggie A e B per la diversa tensione dei due rami della corta cinghia collegante le due puleggie A e B. Se indichiamo con:

T — la tensione del ramo conduttore della cinghia corta;

t — la tensione del ramo condotto della stessa cinghia; forze agenti tangenzialmente alle pulegge A e B;

α — l'angolo che la direzione delle due forze T e t fanno non fra di loro ma con l'asse dei rulli C e D, avremo:

1° lungo l'asse delle puleggie A e B:

$$T_1' = 2\,T \operatorname{sen} \alpha;$$

2° lungo l'asse dei rulli C e D:

$$T_1 = 2\,T \cos \alpha;$$

ed analogamente:

1° lungo l'asse delle puleggie A e B:

$$t_1' = 2\,t \operatorname{sen} \alpha;$$

2° lungo l'asse dei rulli C e D:

$$t_1 = 2\,t \cos \alpha.$$

Da queste quattro componenti, dirette a due a due in senso opposto, avremo che la differenza

assoluta fra le T_1', t_1', è equilibrata dalla stessa incastellatura dell'apparecchio, mentre la differenza assoluta delle componenti T_1, t_1 determina uno spostamento nella direzione dell'asse dei rulli C e D, giacchè i detti due rulli possono liberamente spostarsi lungo quell'asse. Tale spostamento avviene nella direzione dall'alto al basso, allorchè il movimento delle cinghie avviene come indicano le frecce della fig. 86, poichè T_1 è sempre maggiore di t_1; il valore della differenza $(T_1 - t_1)$ è esattamente determinato da un apparecchio per la determinazione di uno sforzo di trazione, e cioè da un dinamometro o da un dinamometrografo a seconda dei casi.

Sostituendo ai valori T_1 e t_1 i valori dianzi trovati, avremo:

$$T_1 - t_1 = 2 \cos \alpha \, (T - t).$$

Ma se l'apparecchio è disposto per modo che nella posizione normale, il triangolo formato dal centro dell'apparecchio, con la corda che sottende l'arco abbracciato dal cingolo corto sulle puleggie è equilatero, e quindi equingolo, avremo:

$$\alpha = 60^0$$
$$\cos \alpha = {}^1/_2$$

e quindi la formula dianzi trovata, diventa:

$$T_1 - t_1 = T - t.$$

L'apparecchio quindi in tali condizioni fornisce direttamente la differenza fra le tensioni dei due

rami del cingolo trasmettente, valore che utilizzeremo per determinare la forza trasmessa.

È ovvio che gli spostamenti permessi a rulli *C* e *D* non debbono essere grandi affinchè si abbia con grandissima approssimazione $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

73. *Dinamometro dell'ing. Morosini.* — Un altro principio, analogo al precedente, su cui è basato

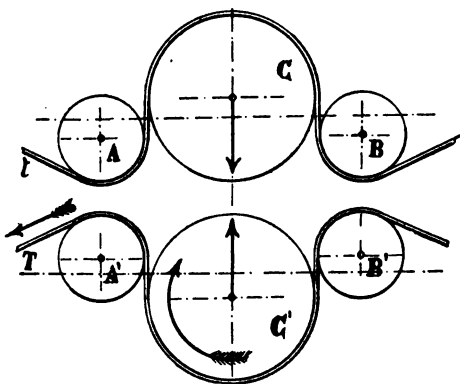



Fig. 87.

il dinamometrografo di rotazione dell'ing. Morosini, è tale che può servire alla costruzione di un dinamometro di rotazione da essere direttamente applicato sul cingolo lavorante; quelli esaminati fin ora erano tutti apparecchi di rinvio, internamente ai quali erano disposti ingranaggi o cinghie.

La fig. 87 lo rappresenta schematicamente, e da

essa si deduce chiaramente che nel senso dell'asse dei due perni, sostegno delle pulegge maggiori $C\ C'$, si genera una forza eguale alla differenza delle tensioni del cingolo. L'apparecchio è disposto per modo che le coppie di pulegge $A\ C$, $A'\ C'$, $B\ C$, $B'\ C'$, abbiano le tangenti comuni normali alla direzione del cingolo. Per questo, colle stesse notazioni usate pel dinamometro precedente, cioè quello del Thomson, avremo:

$$T_1 - t_1 = 2\,(T - t).$$

Ottenuta la differenza delle tensioni nei due rami del cingolo mediante un dinamometro semplice o registratore od un ergometro di trazione, giacchè le due pulegge C, C' tendono ad avvicinarsi, si ricava il lavoro trasmesso dal cingolo, come vedremo.

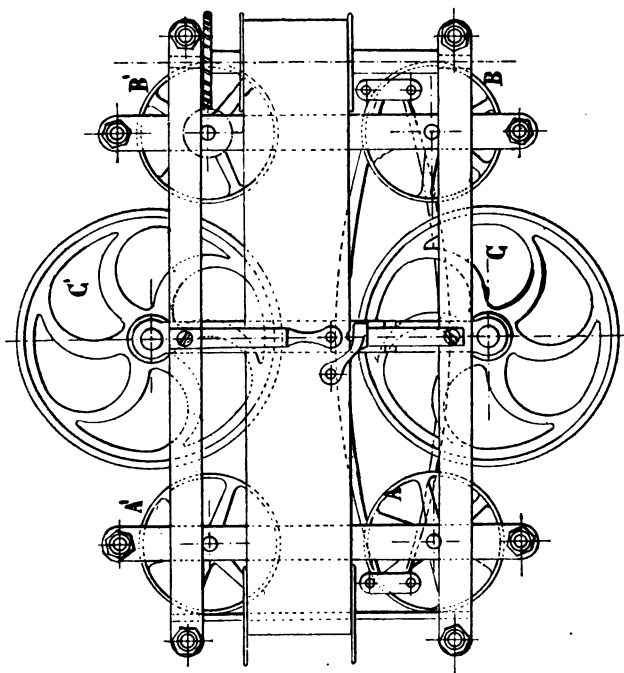
§ 5. Dinamometrografi di rotazione.

74. *Dinamometrografi di rotazione.* = I dinamometri di rotazione passati in rivista non possono fornire indicazioni esatte se non quando la forza si mantiene costante per tutto l'intervallo durante il quale si eseguisce l'esperienza, e quindi si possa facilmente misurare la forza occorrente per mantenere sensibilmente fissa la posizione di quegli organi a cui è permesso spostamenti. Un primo mezzo, per togliere l'inconveniente di non potere adoperare i dinamometri semplici di rota-

zione se non quando la forza da misurare si mantiene costante, è stato adottato aggiungendo un dinamometro, registratore od ergometro, per ottenerne il valore medio della forza agente alla periferia delle puleggie o delle ruote formante parte dell'apparecchio; tuttavia questo sistema obbliga l'uso di due apparecchi distinti, il che non è punto conveniente, nè dal punto di vista economico, nè dal punto di vista pratico. Per questo si idearono altri apparecchi che, senza l'aggiunta di altri apparecchi di misura, fornissero essi stessi le indicazioni necessarie pel calcolo del lavoro trasmesso da un albero ad un altro. Il Morin fu uno dei primi. Tuttavia esamineremo dapprima il dinamometrografo di rotazione dell'ing. Morosini, giacchè abbiamo visto pocanzi il principio su cui si basa.

75. *Dinamometrografo dell'ing. Morosini.* — L'ing. Morosini (vedi fig. 88), al dinamometro semplice di rotazione descritto al N. 73, ha aggiunto, solidale all'incastellatura due lunghe molle a balestra che servono per misurare la differenza $(T - t)$ di tensione fra i due rami del cingolo. La deformazione delle molle è registrata ad ogni istante, analogamente a quanto avviene in un dinamometrografo di trazione, su di una striscia di carta animata di moto esattamente proporzionale allo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza. Tale movimento è ottenuto da una delle pulegge di guida, mediante una vite senza fine ed una ruota elicoidale, per diminuirne la velocità nel rapporto necessario. La determinazione

del lavoro misurato con questo apparecchio la vedremo nell'apposito capitolo; rammentiamo solo che la determinazione della forza $(T - t)$ è fornita

Fig. 88.

dalle molle nello stesso modo che è fornita una forza di trazione con un dinamometrografo di trazione.

76. *Dinamometrografo del Morin.* — L'apparecchio ideato dal Morin si dispone a guisa di albero di rinvio fra l'albero motore e l'albero mosso; le due puleggе, la ricevente e la trasmettente il moto, sono coassiali, e fra di loro è disposta una terza puleggia folle, che serve ad arrestare il funzionamento dell'apparecchio a tempo opportuno od a porlo in azione. Le figg. 89-90 rappresentano un tipo di dinamometrografo di rotazione del Morin.

Sull'albero principale, imperniato in due sopporti S S, fissi ad una solidale piastra di base, sono disposte le tre suaccennate pulegge P', P, P'', di cui la P'' fissa all'asse e le altre due P, P' mobili. La cinghia motrice, che trasmette il moto dall'albero motore all'apparecchio di misura, che funziona da rinvio di trasmissione, aziona la puleggia P'; essa si rende solidale all'albero mediante l'interposizione di una molla incastrata, da un lato in un manicotto solidale coll'asse, dall'altro lato alla corona della puleggia P'. La puleggia P'' che si muove coll'asse, trasmette, mediante altra cinghia, il moto all'albero che deve ricevere il movimento; questa cinghia si può a volontà far scorrere o no sulla folle P a secondo che non si vuole o si vuole trasmettere il movimento; la cinghia motrice invece resta sempre sulla puleggia P' che mantiene, per conseguenza, l'apparecchio sempre in movimento a meno che non s'arresti il movimento dell'albero motore con qualche altro mezzo.

Quando il dinamometro è posto in azione, e

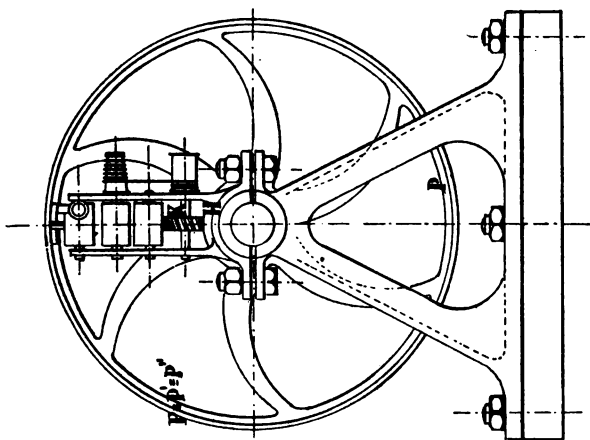
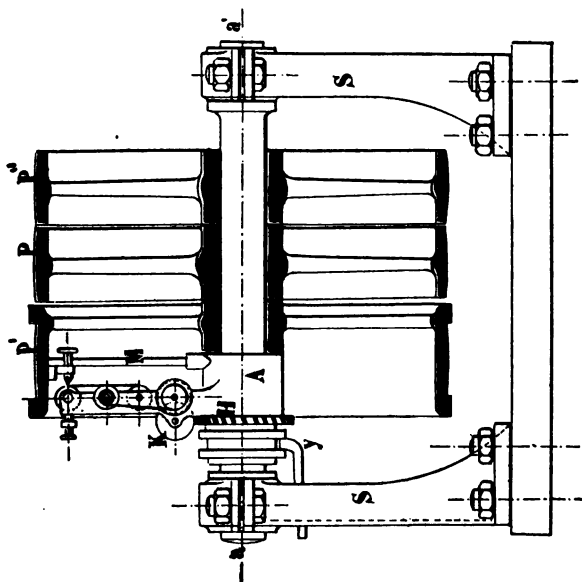



Fig. 90.

Fig. 89.

quindi la puleggia P' si mette in movimento, la molla s' inflette, ed allorchè la sua resistenza alla flessione è capace di equilibrare la resistenza che si oppone al moto dell' albero principale, e quindi dell'albero conduttore, si mette in moto la puleggia P''. La forza motrice, agente tangenzialmente alla periferia della puleggia P', e che si trasmette all'albero che deve ricevere il movimento mediante la puleggia P'', si può misurare mediante le deformazioni della molla dianzi accennata in modo analogo a quello usato per la misura di una forza lavorante per trazione. L'esattezza della determinazione della forza motrice e del lavoro che eseguisce lungo un dato spazio, dipenderà, come facilmente si comprende, dall'esattezza con cui le deformazioni, moltiplicate o no, dell' estremità della molla rispetto all'asse principale, od a qualunque altro punto ad esso rigidamente connesso, sono proporzionali alla intensità della forza.

La molla è disposta in modo che si può cambiare a seconda degli sforzi massimi che si devono misurare. La punta registratrice dell' apparecchio indicatore è fissata ad un punto interno della periferia della puleggia, e segue i movimenti relativi fra la corona stessa ed una apposita incastellatura fissa all'asse; tale incastellatura è disposta in modo da presentare alla punta registratrice la generatrice di un rullo sul quale passa la carta, mossa di moto proporzionale allo spazio percorso dalla forza tangenziale agente sulla molla. Il meccanismo registratore è identico a quello del dinamometrografo di trazione dello stesso autore,

ed è rappresentato in scala maggiore dalle figure 91-92.

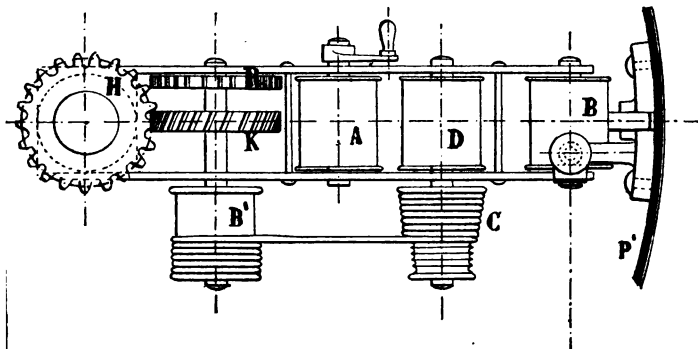



Fig. 91.

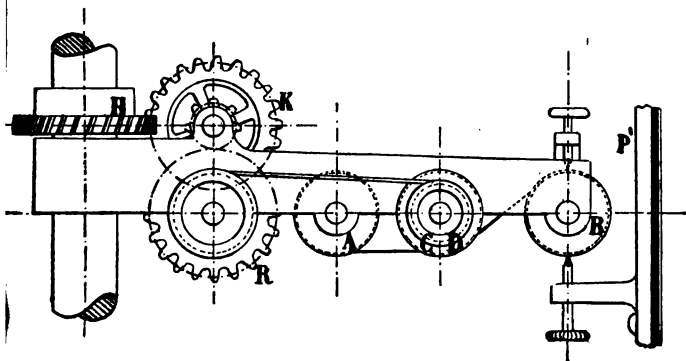



Fig. 92.

Alle due piastre che sostengono i rulli e pre-

cisamente dinanzi al rullo sopracitato *B*, trovasi fisso una seconda punta registratrice, che segna sulla carta, man mano svolgentesi, la linea di base.

Si avrà in tal modo, allorchè il dinamometrografo funziona, sulla carta un diagramma ortogonale, quando la carta si sposta di moto proporzionale al punto d'applicazione della forza, ossia al numero dei giri dell'albero principale. Per ottenere questo si rende fissa col sopporto dell'apparecchio prossimo alla puleggia *P'* una ruota eli-

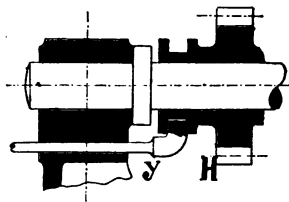



Fig. 93.

coidale *H*, sulla quale sviluppandosi un'altra ruota elicoidale *K* si ottiene il moto del primo cilindro *B'*, a mezzo di ruote che servono a ridurre la velocità della carta nel rapporto necessario e voluto. Per fissare la ruota elicoidale *H* al sopporto, serve un semplice gancio *y*, come vedesi dalla fig. 93, oppure altri mezzi adatti a tale scopo.

77. *Altra disposizione del dinamometrografo del Morin.* — In un altro modello rappresentato dalla fig. 94-95 la disposizione della molla, anzichè es-

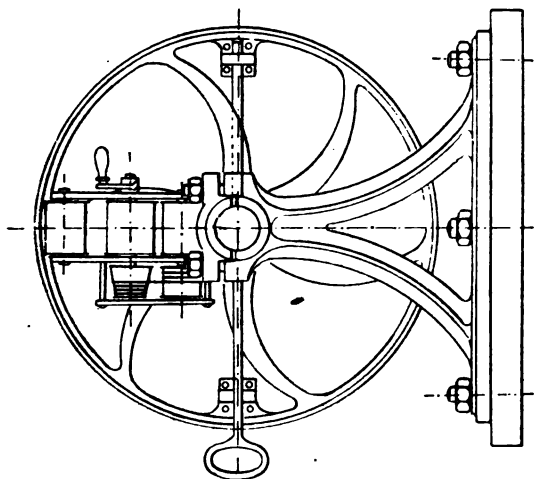



Fig. 95.

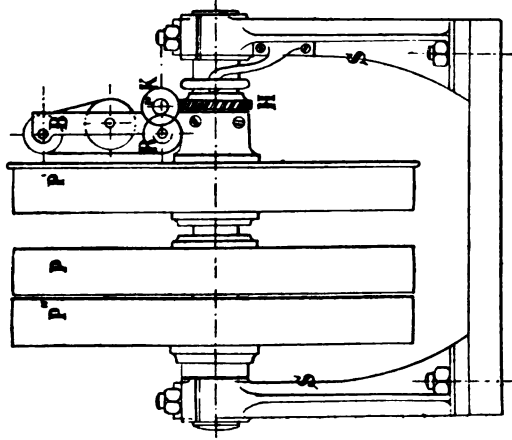



Fig. 94.

sere parallela all'apparecchio registratore nella posizione normale, si trova collocata nella direzione del diametro normale, e tutto l'apparecchio registratore all'esterno della puleggia motrice.

In ambo gli apparecchi, mediante formule che danno le deformazioni delle molle per i vari casi, è facile ottenere l'intensità *P* della forza tangenziale e quindi il lavoro trasmesso dall'albero motore all'albero mosso a mezzo del rinvio, apparecchio di misura esaminato.

78. *Manovella dinamometrica.* — Se dell'ergometro precedente del Morin (ergometro poichè trovasi molte volte descritto sotto tal nome) consideriamo il solo apparecchio registratore unitamente alla molla si ha l'apparecchio detto manovella dinamometrica. Nel tipo rappresentato dalla fig. 96 al semplice apparecchio registratore sono state aggiunte parti secondarie per rendere l'apparecchio d'uso pratico; alla parte superiore è stato aggiunto una manovella per fare funzionare l'apparecchio a mano, dalla parte opposta un contrappeso per equilibrare l'apparecchio stesso; alcune viti di pressione per rendere solidale l'apparecchio ad un albero qualunque ed un braccio per fissare al manicotto una puleggia, qualora fosse il caso di trasmettere il moto ad un altro albero mediante una cinghia. La matita mobile è sostenuta da un braccio che fa parte del manicotto che riceve il moto a mezzo della molla elastica; il moto alla carta è trasmesso coll'intermezzo di una catenella anzichè con ingranaggi. Il calcolo del lavoro e della forza media è identico a quello del Morin, e lo vedremo in seguito.

79. *Dinamometrografo Easton ed Anderson.* — Analogo a quello di Morin nei suoi principi è il dinamometrografo di rotazione di M. M. Easton et Anderson della società reale d'agricoltura inglese (fig. 97-98), giacchè utilizza le deformazioni di molle che permettono uno spostamento angolare fra la periferia della puleggia ed il suo

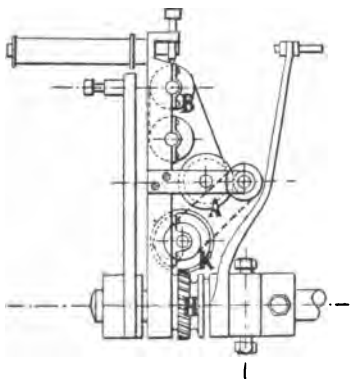



Fig. 96.

asse portante, prima di raggiungere l'equilibrio fra la forza motrice e la reazione interna delle molle stesse.

Le molle, come vedesi nella fig. 99 sono quattro, disposte ad arco, le cui deformazioni sono opportunamente limitate da appositi ritegni Q Q' Q'',

perchè non oltrepassano il limite massimo per esse prestabilito. Lo spostamento angolare fra la puleggia motrice e la trasmettitrice è trasformato nel moto rettilineo di un'asta scorrente all'interno dell'asse portante le pulegge, mediante una coppia di ingranaggi conici, ed una coppia di ingranaggi piani *C*, *B*, di cui la cremagliere *B* è disposta in una apposita fenditura dell'asse (fig. 100). In tal modo l'apparecchio è reso indipendente dalle pulegge, ed è racchiuso in una apposita cassettina *D* all'esterno dell'incastellatura, lungo il prolungamento dell'asse *a a'*.

Tale disposizione, oltre a fornire maggiore sicurezza dello stesso apparecchio registratore, permette di controllare facilmente e comodamente l'andamento dell'apparecchio stesso durante l'esperienza, e controllare l'esperienza stessa.

Questo dinamometro, a differenza di quello del Morin, non ha puleggia folle sulla quale fare spostare la cinghia motrice, quando si voglia arrestare il funzionamento dell'apparecchio, ma si deve arrestare il motore, o servirsi della puleggia folle dell' albero o macchina mossa, se questa ne è munita.

L'apparecchio registratore (fig. 100), disposto nella cassetta *D* esterna ai supporti, riceve, mediante l'asse dell'apparecchio un movimento di rotazione proporzionale al numero dei giri delle puleggie, e mediante l'asta *t* un moto (spostamento) rettilineo proporzionale alla forza agente tangenzialmente alle pulegge stesse. Il movimento di rotazione si comunica, mediante ingranaggi

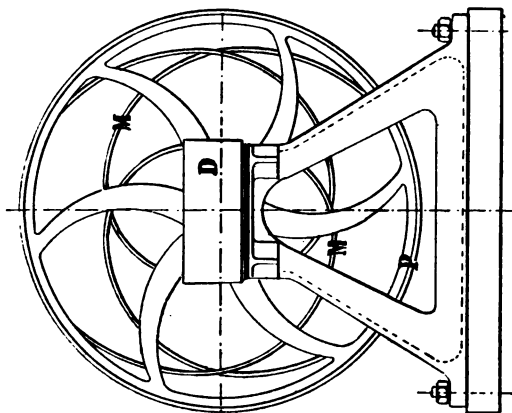



Fig. 98.

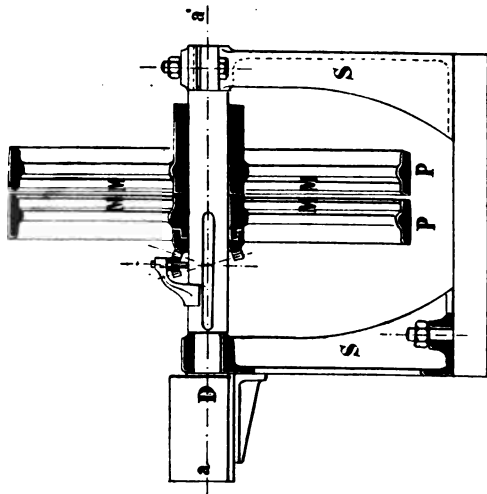



Fig. 97.

ad un contagiri C'' composto di 4 quadranti e ad un cilindro O. Il primo movimento è ottenuto mediante le ruote e pignoni F, F_1, F_2, F_3, F_4; il secondo mediante le ruote e viti senza fine F', G, H, G', H'. Alla ruota F_4 è fissato un piatto N

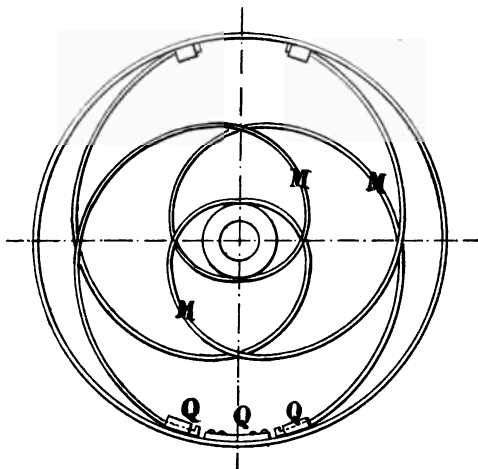



Fig. 99.

che ruota di velocità angolare proporzionale allo spazio percorso dal punto di applicazione della forza. L'asta *t* movendosi di moto rettilineo e proporzionalmente all'intensità della forza, fa spostare un carrello L; su questo è disposto un apposito sopporto guida, che mantiene un tamburo

U mantenuto aderente al piatto *N*. Il carrello *L* seguendo il moto dell'asta *t* sposta il tamburo *U* lungo un diametro del piatto *N*, il quale trasmette al tamburo stesso *U* un numero di giri proporzionale al lavoro della forza (vedi n. 45) che ha

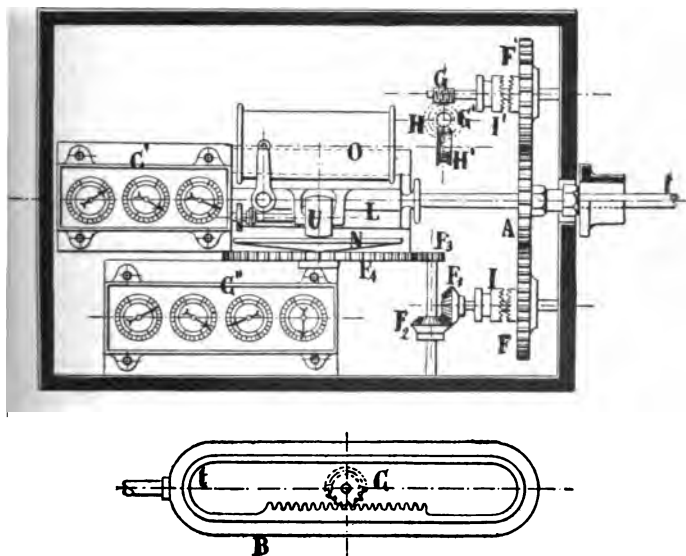



Fig. 100.

agito tangenzialmente alle puleggie e lungo lo spazio da essa percorso nel tempo di durata dell'esperienza, analogamente a quanto avviene nell'ergometro di trazione del Morin e del Bentall.

Un contagiri C' a tre quadranti serve a determinare il numero dei giri del tamburo U.

La posizione del carrello L, quando la forza è nulla, deve essere tale che il tamburo U non ruoti, e quindi coincida con il centro del piatto N.

Quando la forza F si mantiene sempre dello stesso segno, il tamburo U si sposta lungo un raggio, passando dalla velocità minima (zero) alla velocità corrispondente alla distanza a cui è portata, sul raggio del piatto N, dalla forza; ma quando la forza F oscilla fra valori positivi e negativi, il tamburo U si sposta anche in senso opposto al precedente, cambiando la direzione del movimento angolare. Quantunque l'integrazione non viene menomamente alterata teoricamente, viene alterata praticamente, giacchè nel passaggio repentino (come può spesso succedere) da un senso di rotazione all'opposto, vi è un arresto più o meno prolungato del tamburo U. Ne segue che tale apparecchio registratore serve bene solamente quando la forza si mantiene sempre di un senso, od anche quando i cambiamenti avvengono con lentezza.

80. *Modificazioni del dinamometrografo precedente proposte da J. Raffard.* — Pel fatto esposto al numero precedente M. N. J. Raffard ha proposto di munire l'apparecchio registratore di due tamburi U muniti ciascuno di un proprio contatore, per ottenere dalla loro differenza il vero lavoro eseguito.

Nel modello costruito dalla Società d'Agricoltura Francese (fig. 100), anzichè essere appli-

cata la modificazione dianzi esposta, vi si trova aggiunto un registratore grafico, analogo a quelli già applicati nei dinamometrografi di trazione. A questo scopo il carrello *L* è munito di una punta registratrice *P* che segue gli spostamenti del carrello e per conseguenza la intensità della forza secondo una certa scala. Questa punta registratrice si muove lungo una generatrice del cilindro *O* su cui, scorre una striscia di carta di moto esattamente proporzionale e ridotto in una scala nota, lo spazio percorso dalla forza. Il modo di svolgersi della carta mediante il rullo *O* è analogo a quello del dinamometrografo Sack. Su questa striscia avremo quindi un diagramma, da cui dedurre il lavoro o la forza media, nei modi che vedremo più innanzi. In questo secondo registratore a diagramma, un'apposita punta registratrice segna la linea degli sforzi nulli, mentre un apposito congegno *I*, *I'*, serve ad arrestare la trasmissione dei movimenti, quando è necessario o quando accadesse che corpi estranei o d'altro potessero guastare qualche meccanismo.

PARTE TERZA

TARATURA DEI DINAMOMETRI

81. *Taratura di un dinamometro.* — Abbiamo visto che di un apparecchio determinato nelle sue dimensioni principali, si può trovare la legge di variazione del moto della punta registratrice su una data linea (graduazione) in funzione della intensità della forza che determina la deformazione dell'organo principale, come pure lo spazio percorso a partire da un dato istante.

Tuttavia dallo studio dei singoli organi e dei singoli apparecchi si arguisce facilmente che tale determinazione riesce alquanto incerta in causa delle resistenze di attrito degli organi stessi, attrito che può variare per una infinità di circostanze, e che non è collaudato dall'esperienza diretta. Occorrerebbe quindi, con esperienza verificare la legge o le leggi trovate analiticamente. Questa ultima e necessaria operazione rende, apparentemente, inutile la prima, cioè la determinazione analitica; per cui in pratica si eseguisce solo la seconda, che dicesi taratura dell'apparecchio. Le formule precedenti non hanno quindi lo scopo di determinare le suddette leggi che saranno poi usufruite in un apparecchio, ma una legge teorica che corrisponda a quelle esigenze per cui un dato apparecchio è costruito. La tara-

tura poi determinerà i valori pratici che forniscono la legge veramente usufruita dall'apparecchio e che si scosterà alquanto dalla teorica sia per la maggiore o minore bontà dei meccanismi, sia per la qualità del materiale. Il rapporto fra i singoli valori, rapporto che potrà essere o no costante per ogni posizione del meccanismo dell'apparecchio, determina la bontà dell'apparecchio stesso e potrà servire per la correzione dei risultati finali, ottenuti dalle leggi teoriche, *qualora non sia più conveniente usare direttamente la legge pratica*, ottenuta coll'operazione di taratura.

Le formule precedenti forniscono ancora il mezzo per esaminare se i meccanismi di un dato apparecchio forniscono leggi semplici da cui si possa ricavare esattamente il valore dell'intensità della forza agente ed il lavoro da essa fornito. Nell'apposito capitolo vedremo a quali condizioni devono soddisfare queste leggi; per ora vediamo quali sono i mezzi che più facilmente si prestano per la operazione di taratura.

Da quanto precede si comprende che un apparecchio di taratura deve essere tale da sostituire la forza agente sull'apparecchio stesso, e per conguenza una forza di trazione o di rotazione a secondo del dinamometro che si vuol tarare.

Per i dinamometri di trazione basterà quindi realizzare una linea lungo la quale esercitare una forza facilmente misurabile; per quelli di rotazione invece si dovrà determinare gli spostamenti dell'apparecchio indicatore o registratore sotto l'azione delle forze agenti alla periferia di puleggie di noto diametro.

Occorre ancora notare che per alcuni dinamometri di rotazione, come quelli di Thomson e Morosini, la taratura deve essere doppia se si vuole che il dinamometrografo di trazione, formante parte dell'apparecchio, serva anche come dinamometrografo di trazione.

82. *Taratura di un dinamometro di trazione adatto per la misura di forze di poca intensità.* — Il dinamometro da tarare sia di piccole dimensioni; in tal caso il sistema più conveniente è quello diretto, che consiste nel sospendere lungo una verticale l'apparecchio, ed esercitare i vari valori dell'intensità della forza con pesi applicati direttamente.

Abbiamo visto che in un apparecchio dinamometrico, sul primo organo agiscono da un lato un certo numero di organi secondari, sul secondo un altro numero in generale diverso dal primo. Questi diversi organi sono sempre di un peso costante, per cui nel sistema diretto sopraindicato è bene fare sì che sull'organo principale agisca, come peso, quella parte che ha minor peso. Supponendo ad esempio di dovere tarare il dinamometro semplice considerato ed esaminato al N. 47, fig. 101, è bene sospenderlo ad un punto fisso mediante l'anello, e caricare il dinamometro mediante il gancio. In tal modo il peso costante che gravita sulla molla determina uno spostamento costante dell'indice sulla graduazione, e solo quando avremo tro-

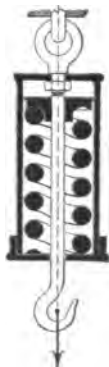



Fig. 101.

vata la legge pratica che lega la posizione dell'indice sulla graduazione e la intensità della forza, potremo segnare con esattezza lo zero, o la posizione dell'indice quando la forza agente è zero.

Quando il dinamometro invece, è calcolato per la determinazione di forze grandi, il metodo diretto non è più possibile, ed occorrerà usare un qualche sistema di leve combinate per modo da potere esercitare una forza rilevante mediante piccoli pesi. Tuttavia restano valide le formole, colla correzione necessaria, per avere la forza F.

83. *Taratura di un dinamometro di trazione adatto per la misura di grandi forze. - Metodo senza bilancia.* — Supponiamo di dovere tarare un dinamometro la cui massima forza da misurare sia rilevante, ad esempio 3000 kilogrammi. So-

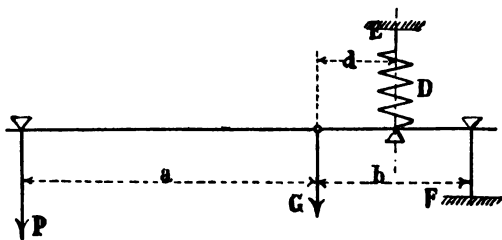



Fig. 102.

spendiamo ad un punto fisso E (fig. 102) il dinamometro, ed in un altro F un tirante agente lungo una direzione parallela all'asse del dinamometro D. Colleghiamo i punti estremi del tirante

e del dinamometro con un'asta di dimensioni tali che possa sostenere senza deformarsi anche parzialmente, i vari sforzi che in essa si sviluppano, e manteniamola in posizione normale coll' intermezzo di appositi coltelli. Nell'estremo dell'asta di collegamento e precisamente dalla parte opposta a quella su cui agisce il tirante, alla distanza $a + b$ facciamo agire le varie forze (pesi) che devono servire alla taratura.

Poichè sono note le dimensioni dell'asta di collegamento e quindi il peso G ed il baricentro d'applicazione, avremo che il primo spostamento dell'indice sarà dovuto al peso G.

Indicando con:

G — il peso totale dell'asta G:
a — la distanza della linea d'azione della forza P dalla linea d'azione di G;
b — la distanza della linea d'azione di G dal tirante;
d — la distanza della linea d'azione di G dalla linea d'azione del dinamometro:
X — lo sforzo lungo l'asse del dinamometro prodotta dal peso G;

avremo:

$$X(b-d) = Gb.$$

Da cui:

$$X = G\frac{b}{b-d}.$$

Analogamente un peso P agente all'estremo dell'asta di collegamento determina una componente

che indicheremo con Y lungo l'asse del dinamometro dato dall'equazione:

$$Y = P\frac{a+b}{b}.$$

La componente Y la potremo fare variare a nostro piacere fino a diventare anche zero, mentre non possiamo fare variare X. Per questo, e perchè la operazione di taratura avvenga regolarmente, cioè che la punta indicatrice determini una serie di valori, varianti di quantità costanti, è bene scegliere per primo valore di P quello che forniscе $(X+Y)$ eguale precisamente alla prima unità scelta per la serie suddetta. Anche qui la determinazione della posizione dell'indice corrispondente alla forza zero dovremo farla in ultimo, quando cioè è nota la legge che lega gli spostamenti dell'indice e le intensità delle forze che lo determinano. Qualora le dimensioni dell'asta di collegamento non siano calcolate per forze superiori di molto alla forza massima che deve misurare il dinamometro da tarare, difficilmente avverrà che il peso G fornisca una componente X di valore superiore alla unità della serie prescelta. In generale però, conviene variare G per modo che esso solo fornisca lungo la linea d'azione del dinamometro una componente eguale all'unità.

Determinata la posizione del primo valore della serie prescelta, con opportuni pesi aggiunti volta per volta lungo la linea d'azione della P, avremo tutti gli altri valori della serie.

84. *Metodo con due bilancie.* — Il metodo precedente esige due punti fissi E ed F. Quando non si possa disporre di tali punti, o richiedano troppo spazio, si può ricorrere ad altri espedienti facili ad immaginarsi.

Si prendano due bilancie A_1, B_1 (fig. 103) e si dispongano sopra due robuste aste di ferro; sui

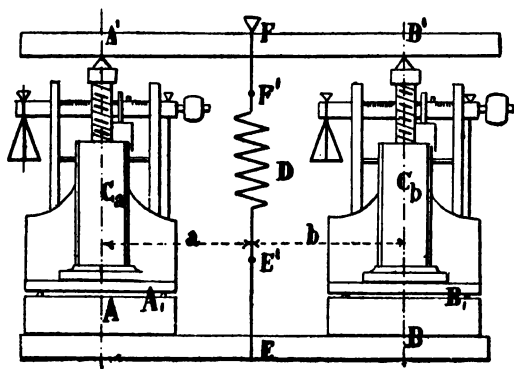



Fig. 103.

piatti delle bilancie si collochinò due puntoni C_a, C_b, di eguale lunghezza e centrati ognuno sul proprio piatto, indi si disponga sopra di essi una traversa A' B' coll'interposizione di due piccoli prismi a sezione triangolare che funzionano come i coltelli di una bilancia. In tal modo si sono determinate due linee verticali funzionanti come solidi caricati di punta, riuniti fra di loro ad angolo retto da due spranghe inferiori, e dell'unica A' B' su-

periore. Parallelamente a queste disponiamo il dinamometro mediante staffe EE', FF' e prismi triangolari analoghi a quelli disposti in A' e B'. È evidente che se con un sistema di vite e madrevite accorciamo una delle due staffe che fissano il dinamometro, non cedendo i due puntoni C_a, C_b, dovrà il dinamometro cominciare a funzionare ed a determinare lungo la propria linea d'azione una certa forza. Questa a mezzo dei due puntoni reagirà sui piatti delle due bilancie, le quali si disporranno nella loro posizione media quando la forza sviluppata dal dinamometro sia esattamente eguale al carico segnato dalle bilancie.

L'operazione di taratura con tale sistema resta semplificato, giacchè basterà accorciare la linea del dinamometro quanto è necessario per determinare nella molla stessa del dinamometro quelle deformazioni necessarie per un determinato spostamento della punta registratrice pel carico segnato dalle bilancie.

85. *Metodo con una sola bilancia.* — Poniamo il centro dei momenti nel punto di intersezione di un puntone fisso colla traversa superiore $A'B'$, ad esempio in B' (fig. 104), indichiamo con:

P_a, P_b — le forze dirette lungo i due puntoni;

a, b — le distanze delle rispettive forze P_a, P_b dalla linea d'azione del dinamometro;

P — la forza agente lungo la linea d'azione del dinamometro;

avremo:

$$P_a\ (a + b) = P_b\ .$$

Da cui:

$$P = \frac{a+b}{b} P_a;$$

che per:

$$a = b$$

fornisce

$$P = 2\, P_a .$$

E poichè nella formula non figura il valore P_b, ne consegue che una unica bilancia serve non solo

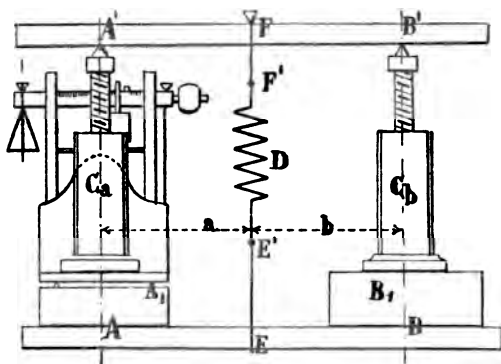



Fig. 104.

allo scopo, ma permette anche di variare le quantità a e b per modo che con un piccolo carico in A' si abbia grande sforzo lungo la linea d'azione del dinamometro.

86. *Dispositivo di due martinetti per agire sul*

dinamometro. — L'uso della vite o di qualsiasi altro meccanismo per fare variare la lunghezza di una delle due staffe che uniscono il dinamometro alle due traverse $A\,B$, $A'\,B'$, è delicatissimo, perchè occorre che nessuna componente dello sforzo necessario al funzionamento disturbi l'istrumento; per questo è razionale la sostituzione di due martinetti ai puntoni quando questi per farli funzionare non abbiano la manovella disposta in modo da fornire componenti nocive. A tutta prima parrebbe che un solo martinetto bastasse allo scopo, ma, siccome le formule che forniscono il carico sopportato dal dinamometro in funzione dei valori dati dalla bilancia, sono state ottenute nelle supposizioni che tanto le due traverse inferiori, la traversa superiore $A'\,B'$, quanto le varie linee d'azione delle forze si mantengano rispettivamente parallele e normali, si comprende chiaramente che uno solo non basta.

I due martinetti, per conseguenza, dovranno essere manovrati per modo da mantenere le condizioni suesposte.

87. *Taratura di un dinamometro di rotazione.* — Sia da determinare la posizione della punta indicatrice o registratrice in un dinamometro di rotazione nel quale l'equilibrio fra le forze esterne e le reazioni dell'organo principale è determinato da uno spostamento angolare fra puleggia motrice e puleggia resistente. Per eseguire la taratura di tali istrumenti basterà determinare la posizione della punta registratrice o scrivente in funzione delle forze esterne, usufruendo di queste per determinare gli spostamenti angolari necessari.

88. *Taratura di un dinamometro di rotazione adatto per la misura di forze di piccole intensità.* — Consideriamo dapprima un istrumento per la misura di piccole forze. Evidentemente basterà e sarà sufficiente applicare a due funi, fisse ad un punto delle periferie delle due puleggie ed arrotolate nei due sensi opposti sulle periferie stesse,

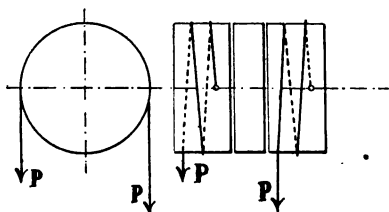



Fig. 105.

due pesi *P* (fig. 105) che determinano lo spostamento angolare e variarli secondo una nota legge per ottenere le varie posizioni della punta indicatrice o registratrice rispetto alla posizione iniziale. I due pesi devono essere eguali perchè non avvenga rotazione in un senso o nell'altro.

Da quanto precede risulta evidente che è possibile usare una sola funicella, ed una sola serie di pesi, quando si possa fissare tutto l'istrumento e per conseguenza una delle puleggie (fig. 106).

Il sistema indicato non può usarsi, come facilmente si comprende, quando gli sforzi tangenziali oltrepassano un certo limite; in questo caso bisogna sostituire apparecchi di riduzione dello

sforzo per poterlo facilmente misurare, come abbiamo fatto per i dinamometri di trazione.

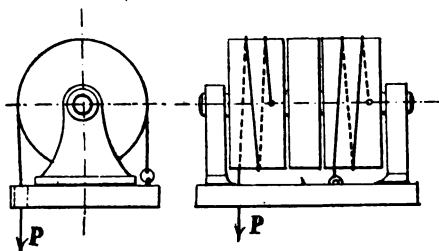



Fig. 106.

89. *Taratura di un dinamometro di rotazione adatto per la misura di forze di grande intensità.* — L'ultimo apparecchio considerato per la taratura dei dinamometri di trazione e di un uso abbastanza semplice, si può convenientemente modificare per la taratura dei dinamometri di rotazione.

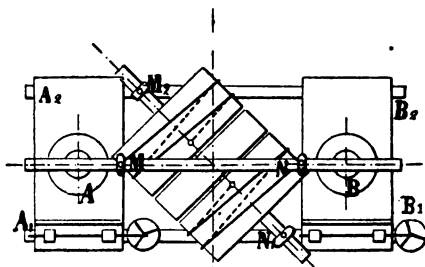



Fig. 107.

La fig. 107 mostra in pianta la disposizione che si può dare all'apparecchio per la taratura di tali istrumenti. L'istrumento da tarare si può fissare mediante due tiranti, od altro, a due punti N_1 M_2 delle due travi inferiori $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, mentre le due funi si fissano a due punti M ed N della traversa superiore AB (fig. 107). Il rapporto delle forze segnate dalla bilancia e quelle effettivamente agenti sull'apparecchio è dato dalla stessa formula trovata precedentemente:

$$P = P_a \frac{a+b}{b}$$

dove per linea d'azione del dinamometro s'intende la parallela alle linee determinate dai martinetti e passante pel punto medio dei punti M ed N. Le considerazioni fatte a suo tempo, circa l'uso di questo apparecchio valgono anche in questo caso.

90. *Diagramma della taratura.* — Mediante uno degli apparecchi precedentemente descritti, od altri di analoghe funzioni che facilmente si possono ideare, potremo, per ogni istrumento o dinamometro da tarare, ricavare due serie di valori distinti.

1°) Serie dei valori dell'intensità delle forze agenti sull'istrumento e che indicheremo genericamente con F_x;

2°) Serie dei valori degli spostamenti della punta indicatrice, che indicheremo con f_x.

La serie delle forze coinciderà colla serie dei

pesi usati direttamente nella taratura dell'istrumento quando si adoperi il sistema diretto, o sarà quella dedotta dalla serie dei valori della bilancia, e ridotta sull'asse dell' istrumento da tarare, quando useremo gli altri apparecchi di taratura. In tal caso moltiplicheremo la serie delle forze fornite dalla bilancia pel rapporto dei bracci cioè per $\frac{b+a}{b}$.

91. *Diagramma di taratura dei dinamometri semplici.* — Portiamo su due assi ortogonali i

Fig. 108.

valori corrispondenti delle due serie, e precisamente per ascisse le intensità delle forze F_x, ed ordinate gli spostamenti f_x, siano essi rettilinei o curvilinei; avremo la curva OA (fig. 108) che ci fornisce graficamente la legge di variazione di f_x in funzione di F_x.

Tale curva, come abbiamo detto, dipende e dalla

deformazione dell'organo principale, e dal meccanismo moltiplicatore e può assumere forme svariate. Per i dinamometri semplici essa può essere qualunque, perchè la punta indicatrice fornisce solamente i valori istantanei su di una apposita scala, le cui successive divisioni non è necessario (sebbene fosse conveniente) abbiano lo stesso valore. Per i dinamometrografi ed ergometri vedremo nell'apposito capitolo per la calcolazione del lavoro e della forza media, che tale curva deve essere una retta, od avvicinarsi ad una retta con grande approssimazione.

92. *Curva del rapporto fra l'intensità della forza ed il corrispondente spostamento della punta registratrice.* — Consideriamo un punto qualunque M_x (fig. 108) della curva OA ed il rapporto fra la forza

$$F_x = ON_x$$

e lo spostamento

$$f_x = M_x N_x.$$

Indicando con a_x questo rapporto, avremo:

$$a_x = \frac{F_x}{f_x} = \frac{O N_x}{M_x N_x}$$

che portato sulla stessa ordinata del punto considerato fornisce un punto B_x. Il segmento $N_x B_x$ nella scala scelta per la rappresentazione degli spostamenti f_x, fornisce il numero delle unità di forza necessarie per determinare uno spostamento di una unità della scala in cui è rappresentato f_x.

Il luogo dei punti B_x è una curva, strettamente legata alla curva OA, e solamente quando OA è una retta, essa è una retta (fig. 109). Questa riuscirà parallela all'asse delle x per qualunque posizione inclinata della OA e la sua distanza dall'asse delle x rappresenta il valore della cotangente dell'angolo φ che la $O\,A$ forma coll'asse stesso. Per un'altra retta OA', formante coll'asse delle x

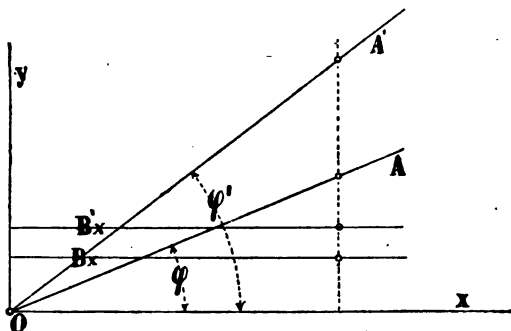



Fig. 109.

l'angolo φ', avremo analogamente un'altra parallela B'_x all'asse delle x.

In tutti gli altri casi in cui la OA non è una retta ma una curva, il luogo dei punti B_x è pure una curva.

93. *Coefficente di correzione per le forze.* — La curva OA dianzi considerata è quella fornita dall'operazione pratica della taratura. Le formule teoriche che legano la forza agente sull'organo principale di un dinamometro e lo spostamento

della punta indicatrice o registratrice, in generale, sarà alquanto diversa, sia per la non esatta coincidenza dei coefficenti propri del materiale adoperato nella costruzione dell' istrumento, sia per le differenze costruttive inevitabili. Rappresentando con OA' tale curva (fig. 108), essendo gli elementi F_x ed f'_x rappresentati nella stessa scala in cui sono rappresentati quelli analoghi della curva OA, avremo analogamente:

$$a'_x = \frac{F_x}{f_x} = \frac{O N_x}{N_x M'_x}$$

e quindi anche la curva B'_x.

Il rapporto fra i valori delle stesse ordinate delle curve B_x, B'_x rappresenta il coefficente di correzione quando si usi dei valori della curva OA', anzichè quelli della curva OA.

94. *Taratura del meccanismo che determina lo spazio in un dinamometrografo.* — Fin qui abbiamo considerato il meccanismo che fornisce la intensità della forza e non quello dello spazio. In alcuni, poichè usufruiscono del movimento automatico e regolare di un meccanismo d'orologeria, dovremo considerare anche il tempo. A quali condizioni debba soddisfare la legge colla quale, o la punta registratrice o la carta, si muove in rapporto allo spazio lungo il quale agisce la forza, lo vedremo nell'apposito capitolo; per ora ci basta esaminare i metodi con cui ottenere teoricamente e praticamente questa legge, e dedurre il coefficente di correzione.

95. *Diagramma dello spazio in funzione del tempo in un dinamometrografo con meccanismo di orologeria.* — Consideriamo uno dei meccanismi in cui il movimento della punta registratrice o della carta, sia prodotto da un meccanismo d'orologeria. Poichè devesi ammettere (giacchè l'economia in tali apparecchi, entro certi limiti, deve essere esclusa) che il meccanismo d'orologeria sia perfezionato e quindi faccia muovere di moto angolare uniforme quell'albero destinato a mettere

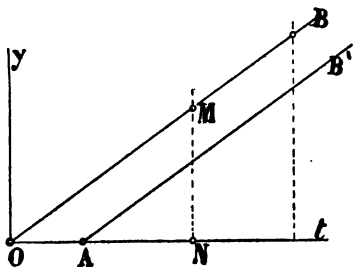



Fig. 110.

in movimento la punta registratrice o la carta, il movimento di quest'ultime sarà pure uniforme. Sarà uniforme qualora meccanismi speciali, per qualsiasi causa, non siano interposti fra l'albero mosso dal meccanismo d'orologeria e l'albero motore della punta registratrice o della carta, e per conseguenza non venga alterato il moto uniforme dato dal meccanismo d'orologeria. Quindi la legge cercata, in funzione del tempo è una retta (fig. 110)

e le ordinate (MN) rappresentano lo spazio percorso dalla punta registratrice o dalla carta in funzione del tempo ($O\,N$). Tale retta, in generale, non passa per l'origine O se non in condizioni speciali, e la ascissa OA rappresenta il tempo trascorso dall'istante in cui ha cominciato a funzionare il meccanismo d'orologeria e l'istante in cui la punta registratrice o la carta si mette in moto. Per semplicità però, quando è possibile far coincidere i due istanti suddetti, ottenendosi in tal caso la coincidenza dei punti A ed O, la retta passa per l'origine mantenendo però la stessa inclinazione.

Inoltre l'inclinazione maggiore o minore di tale retta, rappresenta il maggiore o minore spazio percorso dalla punta registatrice, o maggiore e minore quantità di carta svolta, sempre inteso tenuto conto delle scale con cui sono rappresentati il tempo e lo spazio percorso dalla punta registratrice o la lunghezza della carta svolta.

A seconda delle circostanze, sarà bene che l'apparecchio sia costruito per modo che la legge ora considerata sia data da una retta molto o poco inclinata; se la forza è molto uniforme e le variazioni dell'intensità avvengano con lentezza, la retta OA è bene sia poco inclinata, utilizzando maggiormente la carta, mentre deve essere molto inclinata se le variazioni dell'intensità avvengano bruscamente.

96. *Coefficente di correzione dello spazio.* — Consideriamo invece un meccanismo in cui lo svolgersi della carta (non considerando lo spostarsi della punta registratrice poichè non abbiamo esa-

minato tali istrumenti usufruenti di tale movimento) sia proporzionale con una legge, per ora arbitraria, allo spazio realmente percorso dal punto di applicazione della forza. In questo caso, quando cioè tale legge soddisfi alle condizioni già menzionate e che vedremo in seguito, non dobbiamo che verificare praticamente i singoli valori teorici forniti dalla legge. Per questo facciamo funzionare l'apparecchio nelle precise condizioni nelle quali realmente funzionerebbe, e portiamo come ascisse ed ordinate di un diagramma ortogonale, in opportune scale, le coppie di valori che otteniamo per lo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza, e la lunghezza della carta svolta. Per ogni meccanismo otterremo una diversa curva, che si scosterà dalla teorica di quantità dipendenti dalla più o meno esatta costruzione del meccanismo. Il coefficente σ_x rapporto fra i valori reali e teorici ci rappresenta il termine di correzione di questa seconda parte di un dinamometrografo od ergometro.

97. *Coefficente di correzione dello spazio con un meccanismo di orologeria.* — Nel meccanismo di orologeria esaminato precedentemente avremo $\sigma_x = 1$ qualora il punto di applicazione della forza si sposta di moto uniforme; assumerà valori variabili con legge varia se ciò non avviene.

98. *Coefficente di correzione dello spazio dei vari dinamometrografi.* — Prendiamo in esame gli altri meccanismi adatti a registrare lo spazio, ricerchiamone prima la legge teorica, poi immaginiamone la legge pratica per dedurne la legge con cui

varia ad ogni istante il coefficente di correzione σ_x. Dico immaginiamo, ma in pratica la dedurremo facendo agire l'istrumento nelle identiche condizioni in cui lavorerebbe se funzionasse realmente.

99. *Movimento della carta a mezzo del giunto cardanico. - Relazione fra la carta svolta e lo spazio realmente percorso. - Coefficente di correzione.* — Consideriamo il meccanismo esaminato al n. 41 le cui formule

$$\begin{cases} b = \text{arco}\ \varphi \\ s = \eta\ \text{arco}\ \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \text{arco tang}\ (0{,}81\ \text{tang}\ \theta) \\ s = \eta\ \text{arco}\ \theta \end{cases}$$

rappresentano la legge teorica con cui si svolge la carta a mezzo del rullo O in funzione dello svilupparsi della ruota R sulla linea (o parallelamente) d'azione di una forza da misurarsi. Anzichè eliminare θ e φ, per avere una relazione fra b ed s, daremo a θ dei successivi valori, per ognuno dei quali ricaveremo il corrispondente φ e quindi b ed s. Per ogni meccanismo quindi di dimensioni finite, ad esempio:

$$D = 318.31$$
$$d = 31.831$$
$$\eta = 10$$
$$\alpha = 36^\circ$$

avremo un sol valore per b ed uno solo per s

per ogni valore di θ. La tabella seguente raccoglie i valori di b ed s per una lunghezza di 10 m. di sviluppo della ruota R, corrispondentemente ad un giro completo dell'asse del giunto cardanico.

θ gradi	b mm.	φ gradi	φ secondi	s mm.
0°	0.	0° 0' 0"	0	0
30°	6.94	24°59'57"	89997	833.333
45°	10.81	38°55'32"	140132	125.000
60°	15.10	54°26'25"	195985	1666.666
90°	25.00	90°0' 0"	324000	2500.000
120°	34.90	125°33'35"	452015	3333.333
135°	39.18	141°4' 28"	507868	3730.000
150°	43.05	155°0' 3"	558003	4166.666
180°	50.00	180°0' 0"	648000	5000.000
210°	56.94	204°59'57"	737997	5833.333
225°	60.81	218°55'32"	788132	6250.000
224°	65.10	234°26'25"	843985	6666.666
700°	75.00	270°0' 0"	972000	7500.000
300°	84.90	305°33'35"	1100015	8333.333
315°	89.18	321°4' 28"	1155868	8750.000
330°	93.05	335°0' 3"	1206003	9166.666
360°	100.00	360°0' 0"	1296000	10000.000

La curva della fig. 111 è la rappresentazione grafica della variazione di θ e φ, di b ed s, ot-

tenuta per punti, confrontati coi valori trovati analiticamente e raccolti nella seguente tabella.

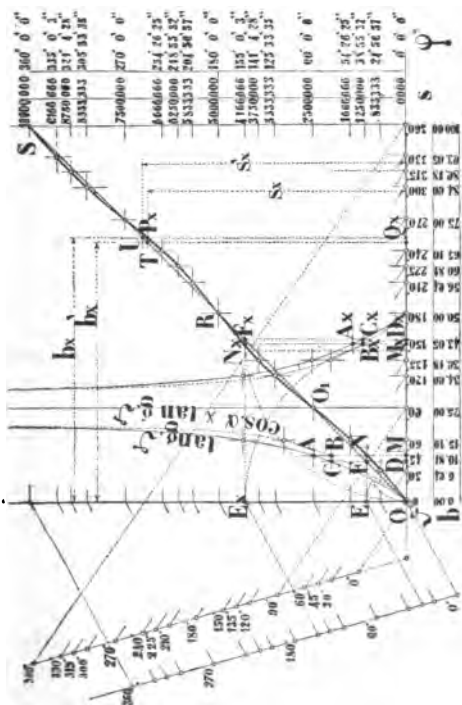



Fig. III.

È da osservare che θ e b, φ ed s sono rappresentati dagli stessi segmenti, ma in due scale diverse, e precisamente :

θ — nella scala di 1° per $^5/_{36}$ mm.;
φ — » » » » » $^5/_{36}$ » ;
b — » » 1 ÷ 2
s — » » 1 ÷ 200

La retta OS rappresenta la legge con cui varia s in funzione di b e viceversa, qualora i due assi fossero l'uno sul prolungamento dell'altro, cioè per $\alpha = 0$; oppure quando si adoperassero due giunti cardanici il cui albero intermedio si mantenesse costantemente inclinato in egual misura sull'albero conducente e sull'albero condotto.

Immaginiamo ora un meccanismo costruito colle dimensioni teoriche sopra indicate. Poichè per costruzione i diametri della ruota R e del rullo O hanno valori alquanto diversi dai teorici, così per s e b avremo in pratica valori diversi dai teorici.

Avremo perciò che τ_x assumerà valori oscillanti entro certi limiti poichè s non varia linearmente con b.

Tuttavia assumeremo per coefficente di correzione σ il valore ottenuto per speciali valori di φ e precisamente per i valori di φ eguali ad un multiplo intero di $\frac{\pi}{2}$.

Indicando con:

$\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_x$ i valori del coefficente di correzioni ottenuti come sopra si è detto;

$b_1, b_2 \ldots, b_x$ i valori teorici della lunghezza di carta svolta;

$s_1, s_2 \ldots, s_x$ i valori analoghi di sviluppo della ruota R;

$b'_1, b'_2 \ldots, b'_x$ i valori analoghi a $b_1, b_2, \ldots, b_x$ ottenuti facendo agire l'apparecchio.

Avremo:

$$\sigma_1 = \frac{b'_1}{b_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{b'_2}{b_2}$$

. . . . .

$$\sigma_n = \frac{b'_n}{b_n}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n}{n}.$$

100. *Coefficente di correzione dello spazio in un dinamometrografo avente la funicella.* — Non consideriamo il meccanismo accennato al n. 42 ed usato in un tipo di dinamometro della casa Sack per le ragioni a suo tempo accennate, ma consideriamo invece quello del n. 44 che mantiene la esatta proporzione fra s e b. Colle notazioni precedenti, risulta chiaramente:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_x = \ldots = \sigma_n = \sigma;$$

per cui la taratura di tale meccanismo si ha colla sola misura di due lunghezze s e b' avendo calcolato dapprima il valore teorico b per lo stesso valore s. Avremo quindi:

$$\sigma = \frac{b'}{b}$$

Si comprende facilmente che nel meccanismo considerato al n. 42 i diversi valori di σ_x dipendono dal modo arbitrario con cui i diversi tratti di fune si dispongono entro la gola della puleggia F_1, e quindi non sia possibile stabilire il valore di σ se non con grande approssimazione.

101. *Coefficente di correzione di un ergometro con apparecchio integratore.* — Consideriamo, per ultimo, il meccanismo integratore esaminato al n. 45. Riprendiamo la formula:

$$L = \frac{a\,r}{m} n'' = k\,n''$$

che ci fornisce il lavoro teorico in kilogrammetri in funzione della costante $\frac{ar}{m}$ e del numero n'' dei giri della rotella D. Facciamo agire l'apparecchio in condizioni note, cioè:

1° spostare la rotella D di una quantità qualunque, ma nota esattamente, ed in modo da ottenere il numero F dei kilogrammi occorrenti a vincere la tensione della molla che tende a mantenere D centrato con C;

2° spostare il primo organo del meccanismo collegato con C, di una quantità s perfettamente nota;

3° leggere esattamente il valore n'';

4° sostituire i valori trovati nelle formule; avremo:

$$F\,s = \frac{a\,r}{m} n'' :$$

da cui

$$\frac{ar}{m} = \frac{Fs}{n''}.$$

Poichè l'organo principale non è determinato, e può quindi essere di varia specie, così bisogna eseguire un certo numero di tali determinazioni. Ponendo:

$$k_1 = \frac{F_1 s_1}{n''_1}$$

$$k_2 = \frac{F_2 s_2}{n''_2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$k_n = \frac{F_n s_n}{n''_n}$$

i vari valori trovati con n esperienze, ed assumendo per costante k dell' istrumento la media dei valori ottenuti in ogni esperienza, avremo:

$$k = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n}{n}$$

e quindi:

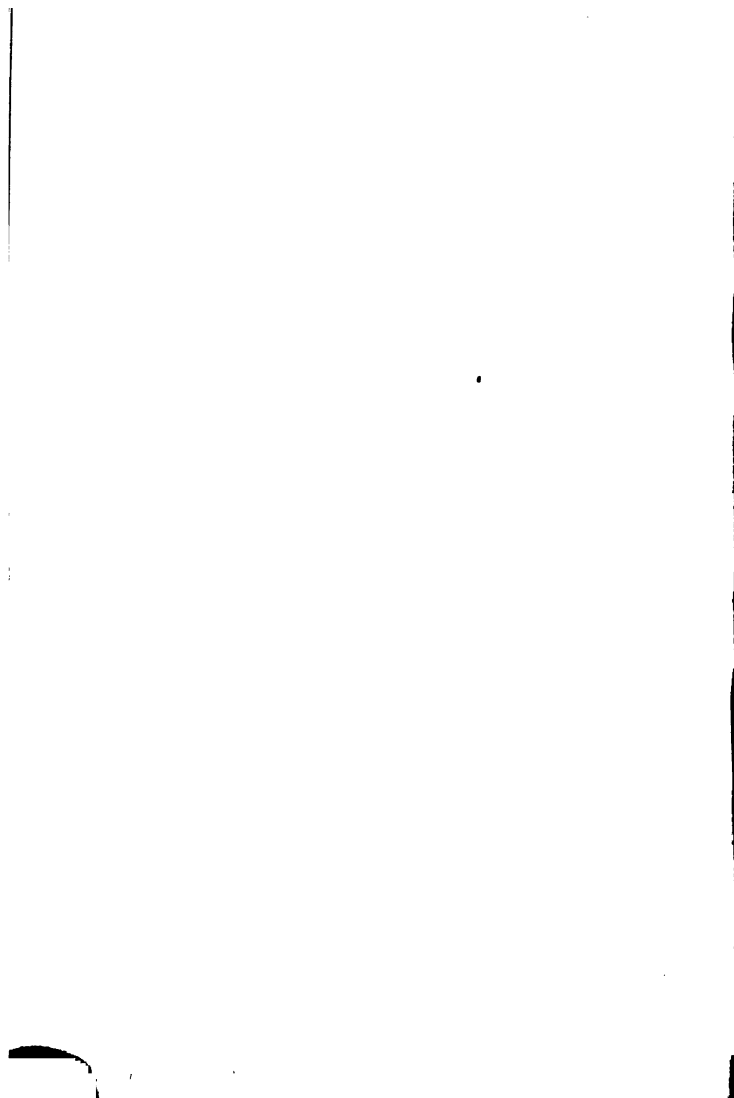
$$\eta = \frac{k}{\frac{ar}{m}} = \frac{km}{ar}$$

dove η rappresenta il coefficiente di correzione qualora, per casi speciali, fosse conveniente usare

il valore teorico $\frac{a\,r}{m}$ anzichè il valore reale dato dall'operazione di taratura.

In tutti quegli altri istrumenti non considerati, la taratura e la determinazione del coefficiente di correzione si ottiene con operazioni analoghe.

Parte Quarta

DETERMINAZIONE DELLA FORZA MEDIA — DEL LAVORO — DELLA POTENZA

§ 1. Generalità.

102. *Come calcolare i singoli elementi dai dati forniti da un dinamometrografo.* — Abbiamo visto che nella maggior parte dei casi per conoscere la intensità di una forza che agisce su di un dato sistema, qualunque essa sia, devesi usare un dinamometrografo od un ergometro, giacchè essa assume valori continuamente variabili. Abbiamo visto inoltre che dovremo, in tal caso, conoscere il valore medio dell'intensità della forza, che si intenda per forza media, o per lavoro eseguito da essa lungo una traiettoria.

A primo aspetto appare razionale determinare successivamente il valore dell'intensità della forza, dello spazio, del tempo, del lavoro eseguito della forza stessa, della potenza; ma per far ciò sarebbe necessario dividere la traiettoria lungo la quale agisce la forza in tante parti, in ognuna delle quali la forza mantenesse un valore costante, conoscere la lunghezza d'ogni singolo tratto, il tempo impiegato dal punto d'applicazione della forza a percorrere ogni tratto, ricavarne per ognuno il lavoro, la potenza ed eseguirne la somma. Questa operazione sarebbe troppo lunga, e l'approssimazione

sarebbe troppo grande, specialmente quando l'intensità varia continuamente senza presentare diversi valori costanti o quasi, se i dinamometri e gli ergometri non fornissero questa somma mediante un diagramma o mediante un numero proporzionale.

103. Ciò posto, quando interessi conoscere il valore medio dell'intensità di una forza agente su di un sistema lungo un tratto di una traiettoria ben determinata, è necessario determinare prima il lavoro e da questo dedurne il dato che interessa, poichè tale elemento è quello che è fornito dagli istrumenti con maggiore esattezza e con maggiore celerità nei calcoli. Tuttavia poichè non è impossibile accada che la detta intensità si mantenga costante, sia agente essa lungo una traiettoria aperta o chiusa, e quindi si possa determinare detta intensità con un dinamometro semplice, così incominceremo a calcolare il lavoro assorbito da un dato sistema in movimento lungo una traiettoria quando della forza agente si possa averne il valore dell'intensità con un dinamometro semplice. In seguito vedremo come è possibile calcolare il lavoro e la potenza di una forza mediante i dinamometrografi e gli ergometri; come dal valore del lavoro si possa ottenere il valore della forza media, infine come si possa ottenere il valore del lavoro per unità di lavoro effettivamente eseguito, e, se del caso, ottenere analoga espressione per la forza media.

104. *Unità di misure e loro indicazioni.* — Prima però di passare in rassegna i vari appa-

recchi, ed i mezzi mediante i quali dedurre, dalle indicazioni da essi fornite, i dati occorrenti, è necessario riassumere in breve le principali indicazioni all'uopo necessarie.

Le singole unità sarà opportuno sceglierle nel sistema Metro-Kilogrammo-Secondo, salvo a trasformare le formule stesse in altre le cui unità appartengano ad altri sistemi, se è del caso; per cui sarà:

1.° La *Forza* espressa in Kilogrammi, che rappresenteremo con . . . . F;

2.° Lo *Spazio* espresso in metri, che rappresenteremo con . . . . s;

3.° Il *Tempo* espresso in secondi, che rappresenteremo con . . . . t;

4.° Il *Lavoro* espresso in Kilogrammetri che rappresenteremo con . . . . L;

5.° La *Potenza* espressa in Kilogrammetri per secondo, che rappresenteremo con . . $\mathcal{L}$.

In pratica è molto usata la espressione della potenza di una forza in *cavalli vapore;* rammentando la definizione di cavallo vapore, che rappresenteremo con C, otterremo i cavalli vapore dividendo per 75 la potenza espressa in Kilogrammetri per secondo, per cui sarà:

$$C = \frac{\mathcal{L}}{75}$$

Nei dinamometrografi ed ergometri, abbiamo già visto che dovremo considerare il valore della *forza media;* questa la indicheremo col simbolo F_m e verrà espressa in kilogrammi, analogamente alla espressione generale F della forza.

Scelto il sistema di misura, vediamo come è possibile avere i valori di tutte le suindicate espressioni mediante le indicazioni fornite dai singoli apparecchi, osservando, il che risulta evidente, che non prenderemo in esame ogni singolo istrumento di misura, ma li intenderemo riuniti in tanti gruppi diversi, quante sono le diverse forme di indicazioni fornite dagli istrumenti stessi.

Incominceremo da quegli istrumenti che forniscono separatamente la intensità della forza, lo spazio, il tempo, poi man mano gli altri le cui indicazioni fornite sono sempre più complesse.

§ 2. Determinazione del Lavoro e della Potenza con i dinamometri semplici di trazione.

105. *Dinamometro semplice.* — Consideriamo un apparecchio che fornisca separatamente la intensità F della forza, lo spazio s, ed il tempo t totale impiegato nel percorrere lo spazio s lungo una nota traiettoria.

In questo caso avremo evidentemente:

$$L = F s$$

$$\mathcal{L} = \frac{L}{t} = F \frac{s}{t} = F v$$

$$C = \frac{\mathcal{L}}{75} = \frac{F v}{75}$$

essendo v la velocità in metri al minuto secondo.

In queste condizioni si trovano tutti i dinamometri semplici di trazione, quando la loro applicazione sia possibile, quando cioè il valore della intensità della forza resti sensibilmente costante per modo che sia possibile ottenere il valore della intensità della forza agente con una esattezza corrispondente alle esigenze delle esperienze.

§ 3. Determinazione del Lavoro e della Potenza con dinamometrografi di trazione.

106. *Dinamometrografi di trazione.* — Consideriamo un dinamometrografo nel quale i valori dell'intensità della forza, in una data scala, e gli spazi, pure in una data scala, siano tracciati da movimenti della punta scrivente, normali fra di loro, su una striscia di carta. Se consideriamo separatamente i due moti avremo:

1.° Che per effetto dello spazio la punta scrivente, o la carta, si sposta parallelamente ad una retta (che assumeremo come asse delle ascisse di un sistema di assi coordinati) di una quantità b il cui rapporto con lo spazio s effettivamente percorso dal punto d'applicazione della forza sappiano essere per ogni istante:

$$R_a = \frac{s}{b};$$

2.° Che per effetto della intensità della forza la punta scrivente si sposta in senso normale al

precedente di una quantità y (che assumeremo come ordinata del sistema di rappresentazione) il cui rapporto con il vero valore F della forza sappiamo essere, per ogni istante:

$$R_o = \frac{F}{y}.$$

Avremo cioè, per ogni istante di funzionamento un punto M_x (fig. 112) di un piano riferito a due assi ortogonali che rappresenta colle sue coordinate lo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza a partire da un punto determinato e la intensità della forza stessa. Chiameremo: ascissa ed ordinata rispettivamente le coordinate rappresentanti lo spazio e la intensità della forza.

107. *Diagramma ortogonale. - Relazione fra il Lavoro e l'area del diagramma.* — Rappresenti la

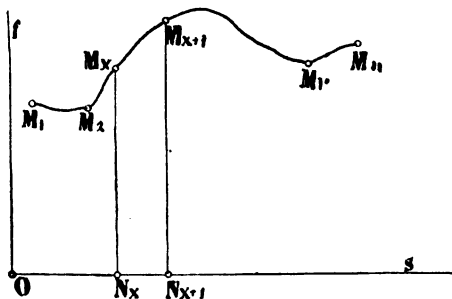



Fig. 112.

fig. 112 una serie di coppie di valori rappresentanti ognuna, per ogni singolo istante, la forza e

lo spazio nelle scale R_o' ed R_a e determinanti una serie di punti $M_1, M_2, \ldots, M_x, M_{x+1}, \ldots, M_n$. Poichè tale serie di punti è fornita da un dinamometrografo nel quale tanto la forza quanto la spazio variano con legge continua, la curva da essi determinata è continua.

Consideriamo i punti generici M_x ed M_{x+1} corrispondenti agli istanti t, $t+dt$, in cui si hanno per ascisse i valori degli spazi x, $x+dx$ e per ordinate i valori delle forze y ed $y+dy$. Essendo le due ordinate $M_x N_x$, $M_{x+1} N_{x+1}$ distanti d'una quantità infinitesima dx, si può considerare retto il tratto $M_x M_{x+1}$ della curva descritta dalla punta scrivente; per cui indicandó un dA l'area compresa fra le ordinate $M_x N_x$, $M_{x+1} N_{x+1}$, il tratto di curva $M_x M_{x+1}$ e l'asse delle x, avremo:

$$d\,A = \text{area } M_x M_{x+1} N_{x+1} N_x$$

$$d\,A = dx \frac{y + (y \pm dy)}{2}$$

dove:

$$\frac{y + (y \pm dy)}{2}$$

rappresenta il valore medio dell'ordinata compresa fra i punti M_x ed M_{x+1}.

Sostituendo alle coordinate il loro valore in funzione delle forze che esse rappresentano, cioè:

$$y = \frac{F_x}{R_o}$$

$$y + dy = \frac{F_{x+1}}{R_o}$$

$$dx = \frac{ds}{R_a}$$

dove ds e lo spazio infinitesimo percorso dalla forza nel suo passaggio dal valore F_x al valore F_{x+1}, si ha:

$$dA = \frac{ds}{R_a} \frac{\frac{F_x}{R_o} + \frac{F_{x+1}}{R_o}}{2}$$

$$= \frac{1}{\eta} ds \frac{F_x + F_{x+1}}{2} \; ;$$

ponendo:

$$\eta = R_a R_o \, .$$

Ma $\frac{F_x + F_{x+1}}{2}$ rappresentando il valore medio della forza agente durante lo spazio infinitesimo ds, l'area dA rappresenta il lavoro compiuto dalla forza F lungo lo spazio ds a meno del coefficiente $\frac{1}{\eta}$. Integrando rispetto all'intero spazio compreso fra le ordinate estreme della curva descritta dalla punta scrivente dell'apparecchio, od un tratto di essa, la curva, l'asse della x, avremo il lavoro L fornito da una forza F di intensità variabile da istante ad istante lungo un dato spazio in funzione dell'area A dell'intero diagramma. Avremo quindi:

$$A = \int_{s_o}^{s_x} \frac{1}{\eta} ds_x \frac{F_x + F_{x+1}}{2}$$

$$L = \eta A \, .$$

La determinazione dell'area A del diagramma si ottiene analiticamente, geometricamente o meccanicamente come vedremo in seguito (N. 126-132).

Supponendo per ora noto l'area A, e supponendo costante η, il che ci ha permesso di portarlo fuori del segno d'integrazione, colle notazioni precedenti la formula ultima ci fornisce il mezzo di conoscere il lavoro L in funzione di una quantità A facilmente misurabile. Ma perchè L rappresenti esattamente il lavoro della forza variabile F lungo lo spazio s deve essere costante η e per conseguenza anche i due rapporti R_a ed R_o, escludendo il caso in cui la variazione di questi due coefficienti sia tale da far rimanere tuttavia costante il loro prodotto, poichè gli apparecchi esaminati non possono fornire tali variazioni con mezzi semplici.

Dovendo però esprimere L in Kgm., mentre è comodo esprimere tutte le misure del diagramma in mm., la formula deve essere corretta del coefficiente numerico $\frac{1}{1000}$ [1] poichè lo spazio deve essere espresso in metri, nel valore del lavoro, mentre nell'area A è espresso in mm.

108. *Forza media ed ordinata media.* — Riprendiamo la formula:

$$L = \eta A$$

---

[1] Infatti: poichè b è espresso in mm., e, moltiplicato per R_a, resta pure espresso lo spazio s in mm., per esprimerlo in metri dovremo dividere per i mm. contenuti in un metro cioè, per 1000.

cioè il valore del lavoro di una forza F continuamente variabile lungo uno spazio s in funzione di quantità facilmente misurabile.

Rammentando la definizione del lavoro di una forza, ed indicando con F_m la intensità di una forza costante e di valore tale che sia verificata l'uguaglianza

$$L = \eta A = F_m s$$

possiamo ricavare:

$$F_m = \eta \frac{A}{s}$$

cioè il valore di quella forza, *forza media*, la quale mantenendosi costante fornisce lo stesso lavoro della forza variabile F lungo lo stesso tratto di traiettoria.

Indicando con:

b — la lunghezza della base del diagramma;

f_m — l'ordinata media, cioè quell'altezza che moltiplicata per b fornisce la stessa area A del diagramma; avremo:

$$f_m = \frac{A}{b}$$

$$s = R_a b$$

$$F_m = \eta \frac{A}{R_a b} = R_o f_m .$$

L'ultima formula ci fornisce il valore della forza media F_m in funzione dell'ordinata media f_m del-

l' area A del diagramma, qualora siano soddisfatte le condizioni precisate al numero precedente. La retta parallela all' asse delle ascisse alla distanza eguale all' ordinata media dicesi *retta di compenso*.

109. *Diagramma polare.* — Siano da determinare ora di un diagramma polare le quantità analoghe a quelle di un diagramma ortogonale.

Riferendoci all'unico tipo di dinamometrografo di tal tipo esaminato precedentemente, cioè al dinamometrografo Kraft-Rost, avremo:

1.° che per effetto dello spazio percorso dal punto d'applicazione della forza, la punta registratrice si sposta radialmente;

2.° che per effetto dell' intensità della forza la punta registratrice descrive degli archi di cerchio; archi di cerchio di lunghezze sempre maggiori per uno stesso valore della intensità della forza, man mano che per il primo movimento la punta s'allontana dal polo del diagramma.

Tuttavia se consideriamo come rappresentante dell' intensità della forza in ogni istante ed in una scala data non la lunghezza d'arco, ma l'angolo determinato dalle posizioni dei raggi esterni dell'arco stesso, avremo per ogni valore dell' intensità della forza un valore unico dell'angolo. In tal caso la intensità e la posizione della forza lungo la traiettoria è determinata dalla coppia dei valori dell'angolo formato dal raggio su cui trovasi la punta registratrice con il raggio rappresentante la forza di intensità zero (raggio di base), e dalla distanza dall'arco da cui ha cominciato ad

agire il meccanismo per lo spostamento radiale della punta stessa.

Rappresenti la fig. 113 una serie di coppie di valori rappresentanti nei successivi istanti di funzionamento la punta registratrice del dinamometrografo Kraft-Rost, ed indichiamo con R_a ed R_o

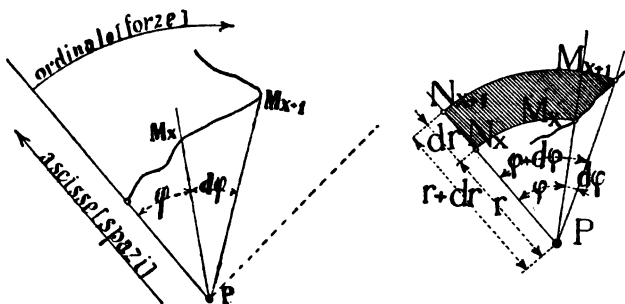



Fig. 113.

le scale nelle quali lo spazio e la intensità sono rappresentate. Siano M_x ed M_{x+1} due di tali punti corrispondenti agli istanti t, $t+dt$, in cui gli spazi siano rappresentati dalle quantità r ed $r+dr$ e le forze da φ e $\varphi+d\varphi$.

Poichè i punti M_x ed M_{x+1} distano di una quantità infinitesima, possiamo considerare il segmento M_x, M_{x+1} come rettilineo e per conseguenza, indicando con dA l'area compresa fra il raggio di base, i due archi $N_x\, M_x$, $N_{x+1}\, M_{x+1}$, ed il tratto di curva $M_x\, M_{x+1}$, avremo:

$$d\,A = \frac{\pi}{180^\circ}\, r\,\varphi\,dr \pm \frac{\pi}{180^\circ}\, r\,d\,\varphi\,\frac{dr}{2}$$

$$= \frac{\pi}{180^\circ}\, r\,dr\,\frac{\varphi + (\varphi \pm d\,\varphi)}{2}$$

Sostituendo agli angoli φ e $\varphi + d\varphi$ il valore delle intensità delle forze che rappresentano, ed allo spazio la quantità analoga, cioè:

$$\varphi = \frac{F_x}{R_o}$$

$$\varphi + d\,\varphi = \frac{F_{x+1}}{R_o}$$

$$d\,r = \frac{ds}{R_a}\,;$$

avremo :

$$d\,A = \frac{\pi}{180^\circ}\,\frac{r}{\eta}\,ds\,\frac{F_x\,F_{x+1}}{2}$$

dove η ; R_a, ed R_o sono i rapporti (N. 106-107) già usati per il diagramma ortogonale. Integrando rispetto all'intero spazio rappresentato nella scala $\frac{1}{R_a}$ dalla differenza fra il raggio massimo r_n ed il minimo r_o comprendenti l' intiero diagramma, o quella parte che si considera, avremo:

$$A = \frac{\pi}{180^\circ}\,\frac{r_o}{\eta}\,L\,.$$

Relazione fra il lavoro e l'area del diagramma. — L'area A del diagramma rappresenta quindi a meno della costante $\frac{\pi}{180^\circ}\frac{r_0}{\eta}$ il lavoro della forza variabile F lungo lo spazio s. La determinazione dell'area A del diagramma si eseguisce rapidamente come vedremo (N. 126-132).

Anche in un diagramma polare la determinazione del lavoro si ottiene in funzione dell'area A del diagramma stesso e del coefficiente η. Tale coefficiente deve essere costante e per conseguenza devono soddisfare a tale condizione i due termini R_0 ed R_a che ne sono i singoli fattori, rammentando quanto si disse al N. 107. Analogamente a quanto si disse pel diagramma ortogonale la formula che fornisce il lavoro in funzione dell'area A del diagramma deve essere modificata, del coefficiente $\frac{1}{1000}$ per misurare gli elementi del diagramma in mm. ed il lavoro in kgm.; avremo quindi:

$$L = \frac{1}{1000}\frac{180^\circ}{\pi}\frac{\eta}{r_0}A\,.$$

110. *Comparazione fra diagramma ortogonale e polare.* — Immaginiamo che un diagramma ortogonale sia generato da una retta muoventesi parallelamente all'asse degli spazi di quantità proporzionali all'intensità della forza, e su di essa si muova di moto proporzionale allo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza la punta

registratrice. Tale generazione del diagramma ortogonale è identica a quella già considerata; tuttavia, rammentando che il muòversi di una retta parallelamente a sè stessa equivale a considerare la retta stessa rotante attorno ad un punto all'infinito nella direzione stessa della retta, riesce evidente che il diagramma ortogonale è un caso particolare del diagramma polare, e precisamente nel diagramma ortogonale il polo trovasi all'infinito. Questa osservazione mostra che le considerazioni fatte su di un diagramma ortogonale si devono applicare al diagramma polare avvertendo di scambiare la parola *angolo* colla parola *ordinata;* avremo per conseguenza in un diagramma polare un *angolo medio* che possiamo ricavare, analogamente all'ordinata media, in funzione di termini facilmente misurabili.

Riprendiamo la formula:

$$L = F_m s$$

ed indichiamo con:

b — la lunghezza del raggio di base comprendente quel tratto di diagramma che si considera ed eguale alla differenza dei due raggi massimo e minimo r_n ed r_o;

φ_m — l'angolo medio, cioè quell'angolo racchiudente unitamente ai due raggi r_n ed r_o un'area eguale all'area A del diagramma;

F_m — l'intensità della forza media;

s — lo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza;

Avremo:

$$A = \frac{\pi}{2 \,.\, 180^\circ} \varphi_m \, b \, (b + 2 \, r_o)$$

$$L = F_m \, s = \frac{180^\circ}{\pi} \, \frac{r_1}{r_o} \, A$$

$$s = R_a \, b$$

$$F_m = \frac{180^\circ}{\pi} \, \frac{R_o}{r_o} \, \frac{A}{b}$$

$$= R_o \, \varphi_m \left(\frac{b}{r_o} + 2 \right)$$

L'ultima formula ci fornisce il valore della forza media in funzione dell'angolo medio, della lunghezza di base del diagramma e del raggio del cerchio che tocca il diagramma stesso dalla parte più vicina al polo. La retta che determina, insieme al raggio di base, l'angolo medio, per analogia, la chiameremo: *retta polare di compenso.*

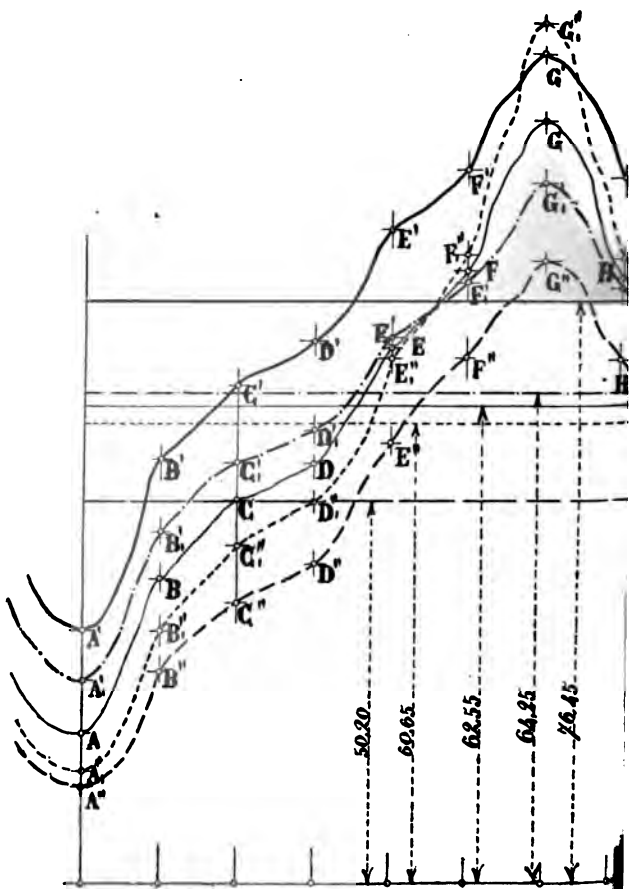
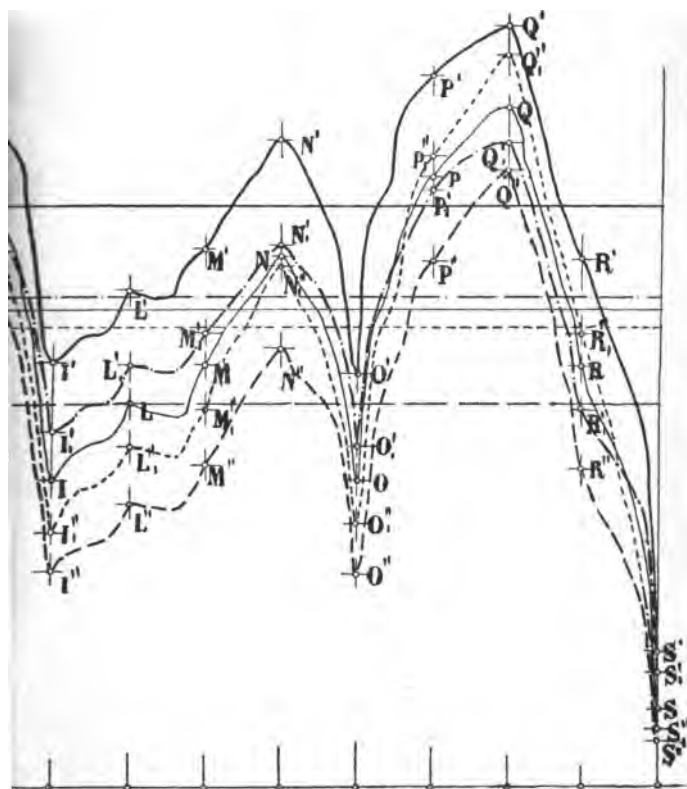
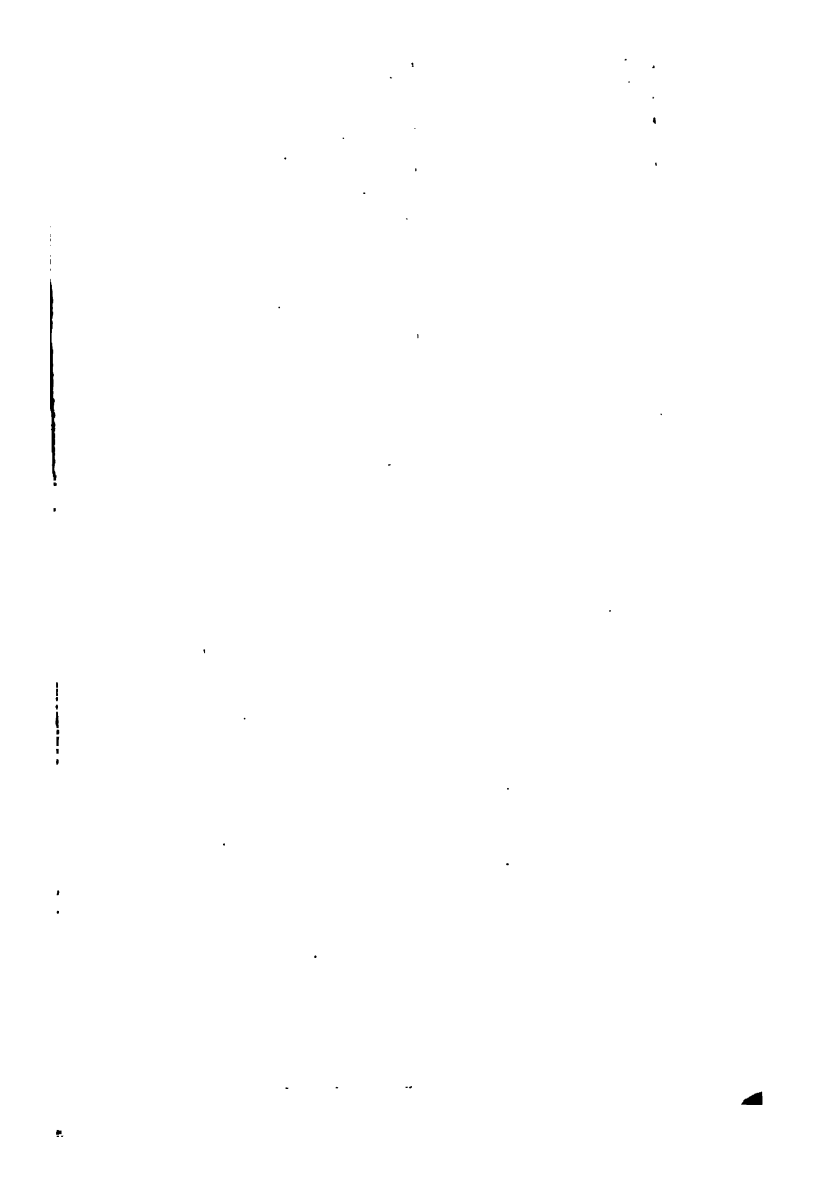
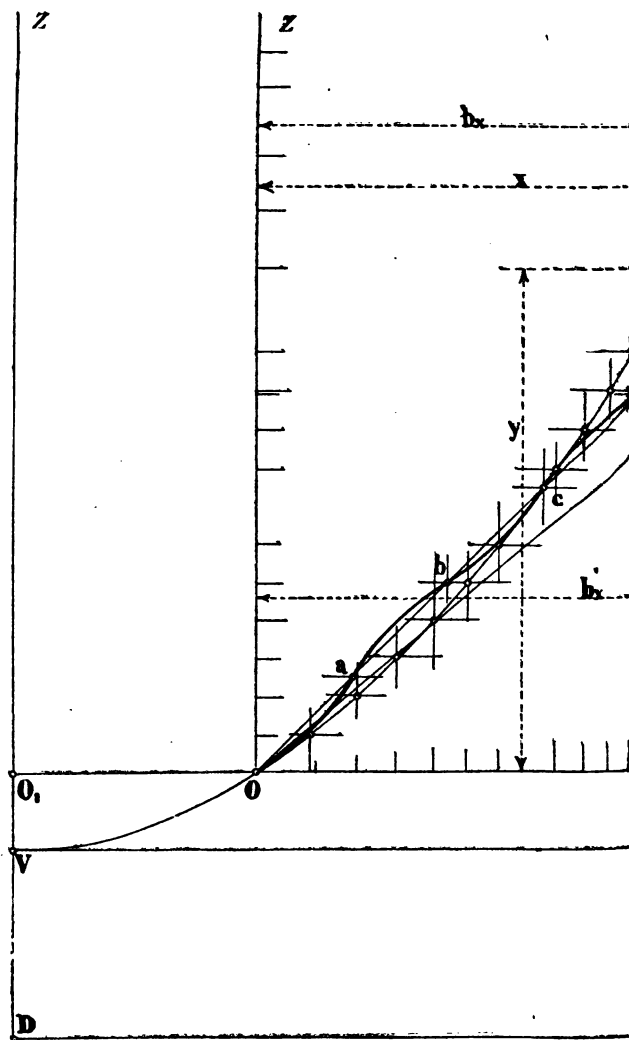
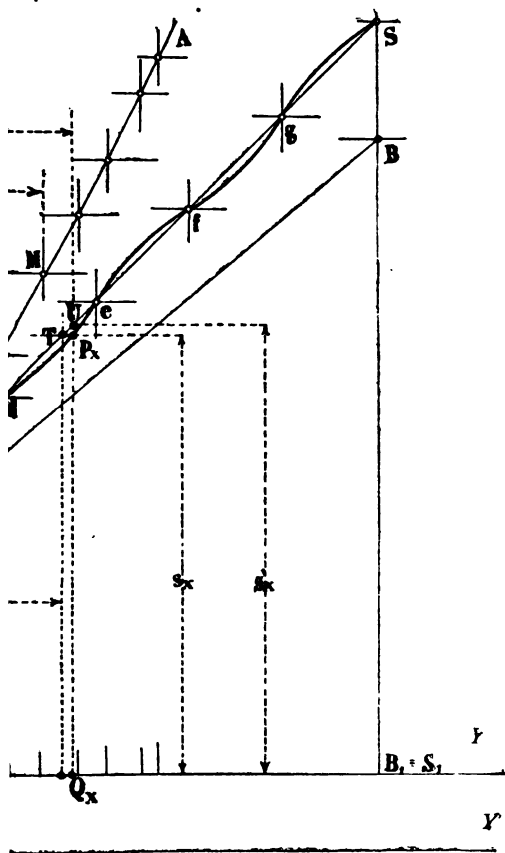
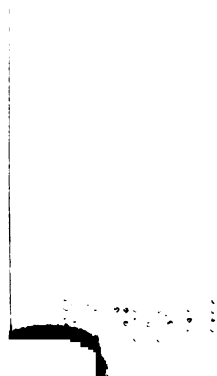
Le formule trovate e l'analogia di esse con quelle di un diagramma ortogonale mostrano chiaramente le condizioni a cui deve soddisfare un dinamometrografo che fornisce un diagramma polare. Essi devono essere quindi calcolati per modo che la punta scrivente fornisca angoli e distanze dal polo linearmente proporzionali colla forza e con lo spazio.

E poichè il dinamometrografo Kraft-Rost (ammesso che esista la esatta proporzionalità fra angoli e forze per tutti i valori), la punta è mossa da un apparecchio d'orologeria per quanto riguarda

50.20
60.65
62.55
64.25
76.45
A'
A
A''
B'
B
B''
C'
C
C''
D'
D
D''
E'
E
E''
F'
F
F''
G'
G
G''
H

Fig. 114.

Fig. 115.

A
S
g
B
f
M
U
e
T
P_x
s_x
s'_x
Y
$B_1 = S_1$
Q_x
Y'

lo spazio, esso sarà solo applicabile se lo spazio percorso dal punto d'applicazione della forza da misurarsi, sia percorso di moto uniforme.

111. *Errore che si commette nel considerare una retta la relazione fra intensità della forza e spostamento della punta registratrice.* — Consideriamo un tratto di diagramma ortogonale posto in condizioni anormalissime, fig. 114 ed ottenuto facendo funzionare un dinamometrografo le cui curve di taratura degli sforzi OA, e degli spazi OS sono rappresentati dalla fig. 115.

Calcoliamo la forza media ed il lavoro:

1.° Nel caso reale, cioè quando il rapporto fra l'intensità della forza e la ordinata è rappresentata dalla curva OA, e quindi variabile per ogni valore dell'ordinata;

2.° Nel caso ipotetico che il rapporto R_0 fra l'intensità della forza e la ordinata che la rappresenta, resta costante per ogni valore dell'ordinata, sia cioè rappresentata dalla retta OB.

In ambo i casi il rapporto fra spazio s realmente percorso dal punto d'applicazione della forza, e lo spazio b percorso dalla carta, sia rappresentato dalla retta OS.

Tenendo presente le scale della fig. 115, cioè:

a) le ordinate del diagramma considerato rappresentate nella scala $\frac{1}{2}$ misurate nella direzione dell'asse OY;

b) le intensità delle forze misurate in Kg. rappresentate nella scala $\frac{1}{20}$ nella direzione OZ,

c) la lunghezza della carta svolta rappresentate nella scala $\frac{1}{2}$ nella direzione dell'asse OY;

d) lo spazio realmente percorso dall'istrumento rappresentato nella scala $\frac{1}{200}$ nella direzione dell'asse OZ;
avremo:

1.° Considerando un punto M di coordinate y, z della curva OA:

$$R_o = \frac{20 \cdot z}{2 \cdot y} = 10 \frac{z}{y}$$

2.° Considerando un punto qualunque della retta OB:

$$R_o = \frac{20 \cdot B_1 B}{2 \cdot OB} = 8{,}4$$

3.° Considerando un punto qualunque della retta OS:

$$R_a = \frac{200\, OS_1}{2\, SS_1} = 100$$

Il valore R_o, ottenuto quando si considera la curva OA devesi ottenere misurando le ordinate e le ascisse sul disegno; tuttavia nella maggior parte dei casi si può sempre trovare un tratto di curva di nota equazione che la rappresenti. Nel caso considerato si ha che la curva OA coincide con un tratto di curva di 2° grado, parabola, di cui possiamo trovarne facilmente l'equazione.

Siano:

M_1	di coordinate	7,15	e	5
M_2	»	27,56	e	25
M_3	»	45,90	e	50

tre punti della curva, le cui coordinate sono riferite agli assi di centro O. Indichiamo con a e b le quantità di cui dobbiamo trasportare l'origine degli assi della curva, affinchè questi siano, il diametro principale e la tangente al vertice della parabola normale al diametro principale; dovranno essere verificate simultaneamente le tre equazioni:

$$(7.15 + a)^2 = 2p\ (5 + b)$$
$$(27.56 + a)^2 = 2p\ (25 + b)$$
$$(45.90 + a)^2 = 2p\ (50 + b).$$

Avremo, risolvendo il sistema delle 3 equazioni contenenti tre incognite:

$$a = 31.6$$
$$b = 10$$
$$p = 50$$

e quindi la posizione degli assi VY', VZ' e del centro V a cui si riferisce l'equazione della parabola

$$y^2 = 2pz$$

di cui OA ne rappresenta un tratto.

Indicando ora con y, z le coordinate correnti

della curva OA riferita agli assi di centro O la equazione rappresentatrice di essa curva OB, sarà:

$$(y + a)^2 = 2p(z + b)$$

e quindi:

$$y^2 + 63.2y - 200z - 998 = O$$

che ci fornisce la forza corrispondente z per ogni valore dell'ordinata y. Osservare che la dicitura ordinata nel senso dell'asse OB_1 rappresenta una anomalia, ma non l'abbiamo modificata perchè essa rappresenta la ordinata del diagramma considerato (fig. 114).

Consideriamo un punto M_x qualunque della curva del diagramma in esame. Nel caso reale la sua ordinata rappresenta la intensità della forza a cui era sottoposto l' apparecchio in quel dato istante, data dall' ascissa della curva OA, corrispondente all' ordinata eguale a quella del punto M_x. Avremo quindi, indicando con:

I_x' — l'intensità della forza corrispondente al punto considerato;

ed uguagliando i due valori corrispondenti delle ordinate d' egual valore del punto M_x e della curva OA:

$y = 100$ nel diagramma (fig. 114)
$y = 50$ nella curva OA (fig. 115)
$z = 55.12$
$I_x' = 1102{,}4$

essendo 20 il rapporto fra la forza e l'ascisse nella curva OA (fig. 115).

Analogamente oprando avremo per ogni punto della curva del diagramma in esame la intensità esatta in chilogrammi della forza a cui in quell'istante era sottoposto il dinamometro e rappresentata dall'ordinata del punto. Per avere il lavoro e la forza media dovremo:

a) Fare la sommatoria dei singoli lavori eseguiti lungo quegli spazi in cui si può con grande esattezza ritenere che la intensità fra gli estremi dei singoli tratti varia linearmente, lavori ottenuti moltiplicando il valore medio delle due intensità agli estremi dei singoli tratti per lo spazio compreso fra le due forze considerate;

b) Dividere la sommatoria precedente per lo spazio totale.

Ma per il confronto che vogliamo fare è bene che l'operazione abbia una rappresentazione grafica, per cui, anzichè eseguire le due operazioni precedenti che sono laboriosissime, per ogni punto del diagramma troveremo un secondo punto che rappresenta la intensità esatta in una scala nota e costante. Ciò facendo otterremo un secondo diagramma $A' B' C' \ldots M'_x \ldots S'$ a cui potere applicare le note formule.

Applicando le note formule (N. 107-108):

$$L = \frac{1}{1000} n A$$

$$f_m = \frac{A}{b}$$

$$F_m = R_o f_m$$

Avremo:

1.° Pel diagramma $A\,B\,C \ldots M \ldots S$:

$$A = 10008$$
$$b = 160$$

usando il planimetro polare d'Amsler (N. 131) per ottenere il valore dell'area A. Da esse avremo:

$$f_m = 62.55$$
$$F_m = 8.4 \times 62.55 = 525,22$$

assumendo per la costante R_o il valore 8.4, ottenuto sopra:

$$L = \frac{1}{1000} 8.4 \times 100 \times 1008 = 8406,72$$

2.° Pel diagramma $A'\,B'\,C' \ldots\ldots M' \ldots\ldots S'$ avremo invece:

$$A = 12232$$
$$b = 160$$
$$f_m = 76.45$$

e quindi:

$$F_m = 642.2$$
$$L = 10274.88\,.$$

Calcolando quindi il diagramma fornito dall'istrumento colle formule solite senza tener conto del modo con cui varia il rapporto R_o, ma considerandolo costante, otterremo dei valori approssimati in meno di una quantità non trascurabile.

112. Consideriamo lo stesso diagramma fig. 114, ma supponiamolo ottenuto facendo funzionare un dinamometrografo la cui curva di taratura sia la OA della fig. 116. Per semplicità immagineremo che la detta curva OA della fig. 116 sia la stessa della fig. 115 usata nella calcolazione precedente, cioè un tratto di parabola, il cui diametro principale sia parallelo all'asse delle y anzichè all'asse delle z; la retta OB abbia mantenuto la stessa posizione rispetto alla curva OA; che la OS abbia mantenuta la identica inclinazione rispetto all'asse delle y.

Applicando i concetti sopraesposti, rammentando che nelle presenti condizioni:

$$R_o = \frac{20 \, . \, B_1 B}{2 \, . \, O B_1} = 12 \, ,$$

avremo:

1.° Per la curva $ABC \ldots M \ldots S$:

$$A = 10008$$
$$b = 160$$
$$f_m = 62.55$$
$$F_m = 850.60$$
$$L = 12009.6$$

2.° Per la curva $A'' B'' C'' \ldots M'' \ldots S''$:

$$A = 8032$$
$$b = 60$$
$$f_m = 50.2$$
$$F_m = 602.50$$
$$L = 9638$$

e quindi dei valori in più se calcoliamo il diagramma colle note formule senza tener conto della curva OA di taratura della molla.

113. *Limite entro al quale si può trascurare la non assoluta variazione lineare fra intensità della forza e lo spostamento della punta registratrice.* — Chiaramente si comprende che le variazioni precedentemente trovate, se si considera la curva OA fig. 115 e 116, nel calcolo degli elementi forniti dal diagramma della fig. 114 ottenuto come sopra s'è detto, sarebbero di molto attenuate se il diagramma considerato non oltrepassasse colle ordinate i limiti del tratto di curva OA compensata dalla retta OB.

Per renderci conto di questa diminuzione sensibile e tanto più sensibile quanto più la retta OS scelta come compensatrice della curva OA si confonde colla curva stessa, eseguiamo sul diagramma stesso (fig. 114) le analoghe operazioni eseguite ai N. 111 e 112, considerando però la retta di compenso OS, anzichè la OB (fig. 115 e 116).

Indicando con:

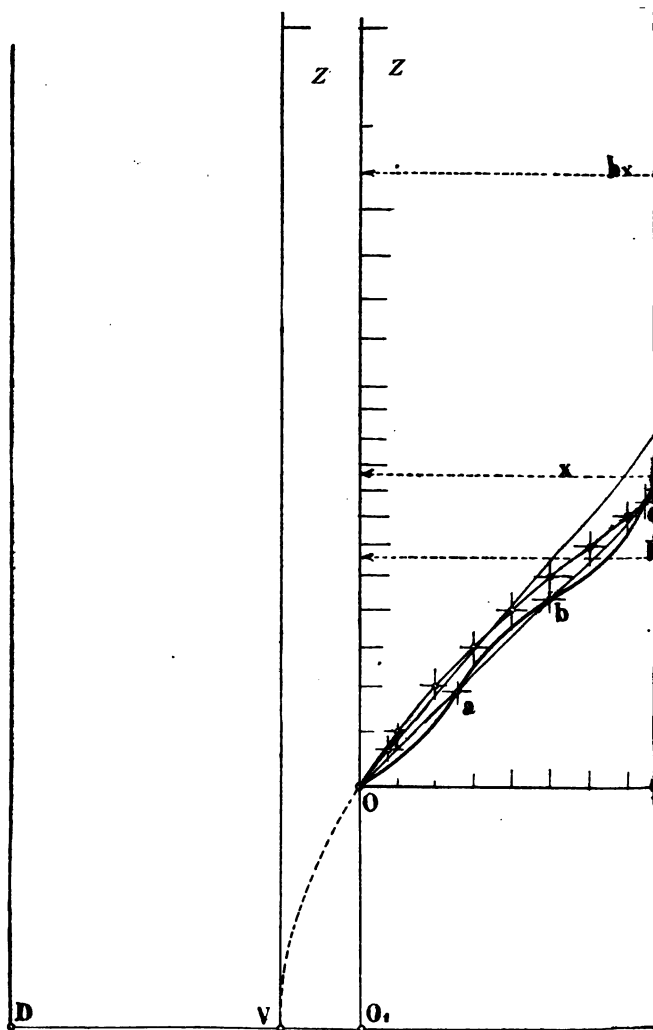
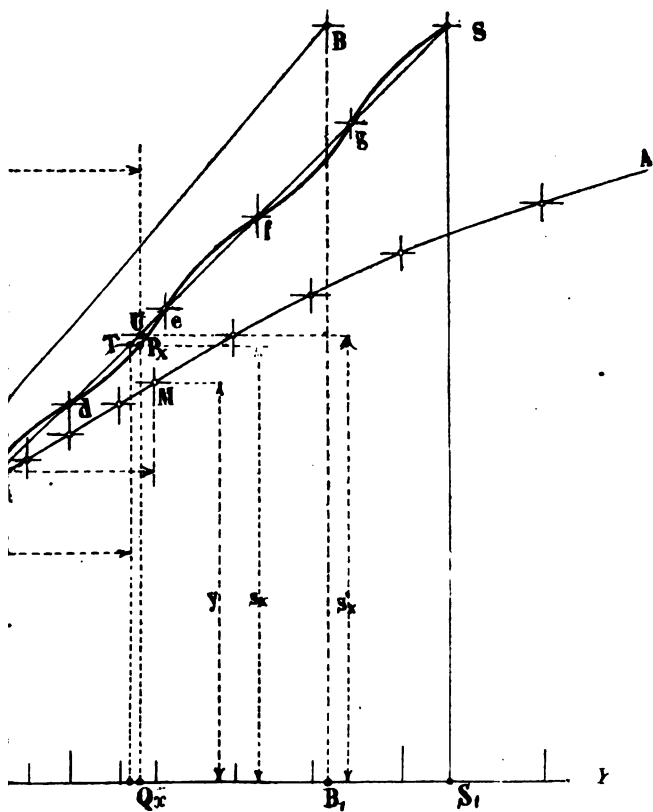
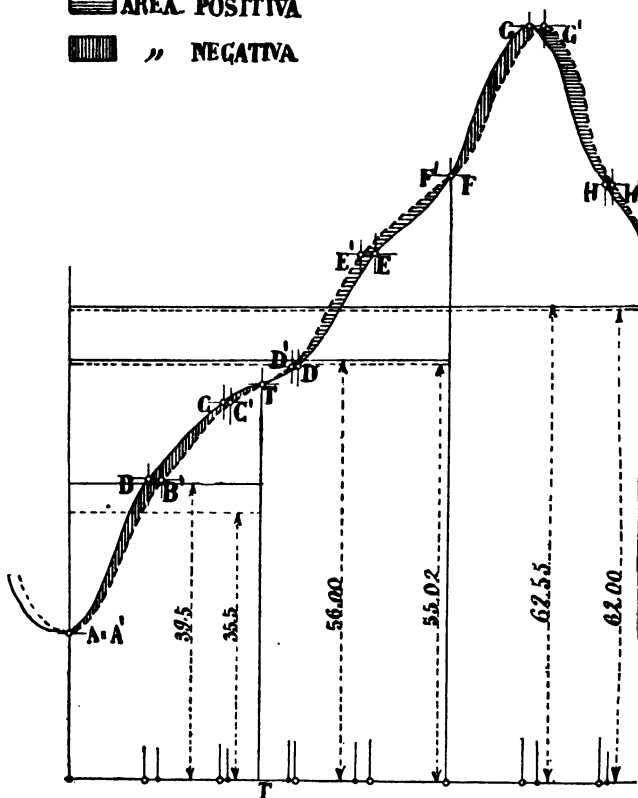
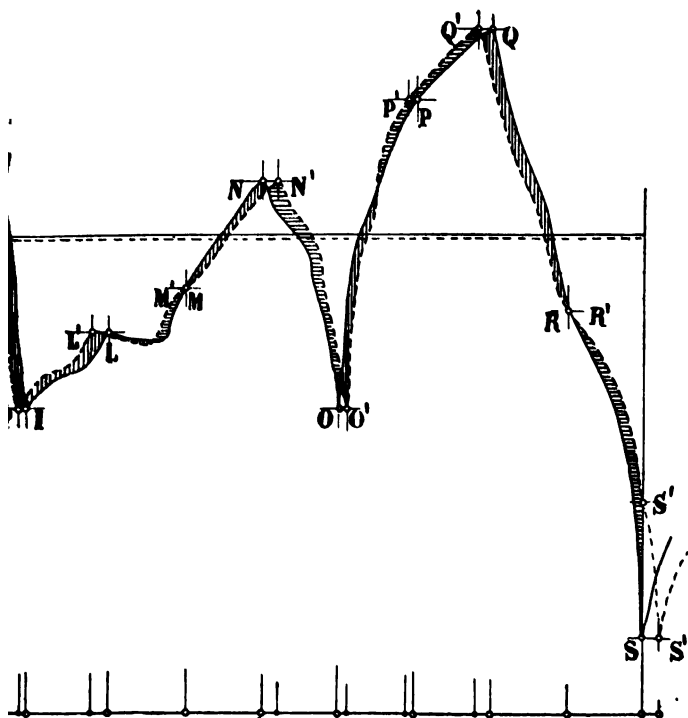
$$A_1' \, B_1' \, C_1' \ldots M_1' \ldots S_1'$$
$$A_1'' \, B_1'' \, C_1'' \ldots M_1'' \ldots S_1''$$

i due diagrammi ottenuti, rammentando che nel tratto ora considerato si ha:

$$R_o = \frac{50 \times 20}{50 \times 2} = 10$$

tanto per la fig. 115 quanto per la fig. 116, avremo:

Fig

ıı6.

AREA POSITIVA
" NEGATIVA
A A'
D B'
C C'
T
D' D
E' E
F' F
G G'
H H'
39.5
35.5
56.00
55.02
62.55
62.00
T

1.° Pel diagramma $A\,B\,C\dots M\dots S$:

$$A = 10008$$
$$b = 160$$
$$f_m = 62.55$$
$$F_m = 625.5$$
$$L = 10008\,;$$

2.° Pel diagramma $A_1'B_1'C_1'\dots M_1'\dots S_1'$:

$$A = 10280$$
$$b = 160$$
$$f_m = 64.25$$
$$F_m = 642.5$$
$$L = 10280\,;$$

3.° Pel diagramma $A_1''B_1''C_1''\dots M_1''\dots S_1''$:

$$A = 9704$$
$$b = 160$$
$$f_m = 60.65$$
$$F_m = 606.5$$
$$L = 9704\,;$$

e quindi le variazioni in più ed in meno calcolando il diagramma $A\,B\,C\dots M\dots S$ colle note formule sensibilmente diminuite.

114. *Quando si può trascurare la non esatta proporzionalità lineare fra forza e spostamento della punta registratrice.* — Da quanto precede ne segue che un diagramma ottenuto con un di-

namometrografo la cui curva di taratura della molla non sia rappresentata da una retta, ma da una curva che s'approssima di molto ad una retta, può essere calcolato colle note formule trovate ai N. 107-108 quando non occorra la massima esattezza e si possa trascurare una piccola variazione. Nel caso contrario devesi usare dinamometrografi la cui curva di taratura sia una retta.

In queste considerazioni è inteso sempre che il rapporto fra lo spazio e lo svolgersi della carta avvenga sempre con rapporto lineare, giacchè nelle calcolazioni precedenti abbiamo considerato sempre

$$R_a = 100.$$

115. *Influenza della non proporzionalità lineare fra lo svolgersi della carta e lo spazio percorso.* — Esaminiamo ora un diagramma ottenuto con un apparecchio nel quale la curva di taratura della molla sia una retta, ma non sia tale quella di taratura dello spazio, e supponiamo che il moto della carta proporzionale allo spazio sia ottenuto mediante il meccanismo studiato ai N. 41 e 99; in tal caso la legge di s in funzione di b è rappresentata graficamente dalla curva $O N O_1 N_x R S$ della fig. 111.

Consideriamo lo stesso diagramma $A B C \ldots M_x \ldots S$ della fig. 114 precedentemente esaminato, e vediamo l'errore che si commette nel calcolarlo:

1.° Nel caso reale in cui il rapporto fra carta svolta (b) e spazio (s) realmente percorso, non

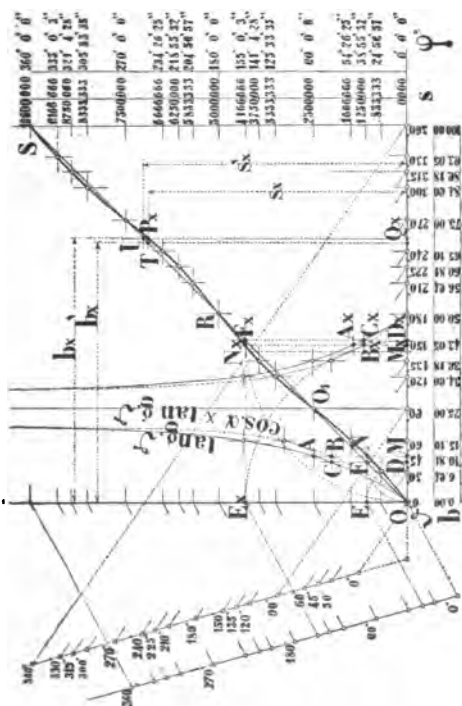



Fig. III.

varia linearmente ma secondo la curva $O\,a\,b\,c\,d\,P_x\,e\,f\,g\,S$, ed il rapporto fra ordinata e forza vari secondo la retta $O\,S$ (fig. 115 oppure 116) (1).

2.° Colle note formule che suppongono vari linearmente tanto il rapporto fra ordinata e forza, come quello fra carta svolta e spazio percorso dal punto d' applicazione della forza. La retta $O\,S$ delle fig. 115 e 116 rappresenta precisamente tale rapporto, e precisamente:

a) colle ascisse la lunghezza b di carta svolta nella scala $\frac{1}{2}$;

b) colle ordinate la lunghezza s di spazio percorso dal punto d'applicazione della forza nella scala $\frac{1}{200}$;

c) colle ascisse le ordinate y del diagramma che si considera, nella scala $\frac{1}{2}$;

d) colle ordinate la forza in Kgr. nella scala di 20 Kgr. per mm.

Nel caso reale ad una lunghezza b_x di carta svolta corrisponde uno spazio s_x percorso dal punto d'applicazione della forza data dalla curva $O\,a\,b\,c\,d\,P_x\,e\,f\,g\,S$ (fig. 115 e 116); tale spazio s_x portato a partire dallo stesso punto da cui si è misurato b_x e nella scala costante rappresentata

(1) La curva $O\,a\,b\,c\,d\,P_x\,e\,f\,g\,S$ è stata ottenuta come l'analoga $O\,N\,O_1\,N_x\,R\,S$ della fig. 111.

dalla retta ORS, si ottiene una lunghezza b_x' in generale diversa dalla b_x di quantità positive o negative a secondo che la s_x, per la corrispondente b_x, è maggiore o minore di s_x', dove s_x' rappresenta il segmento UQ_x tagliato dalla retta OS sulle ordinate $P_x Q_x$.

Considerando, ad esempio, la lunghezza $b_x = 20$ corrispondente ad una lunghezza di carta svolta, $20 \times 2 = 40$; si ha $s_x = 21 \times 200 = 4200$ mm. Tale spazio portato nella scala $\frac{1}{200}$ determina una una lunghezza $b_x' = 42$ maggiore di 40.

Ricavando i vari valori b_x' per i corrispondenti b_x del diagramma considerato, rammentando le due diverse scale delle fig. 115 e 116 e della fig. 117, avremo la tabella seguente:

b_x	s_x	s'_x	b_x	s_x	s'_x
0	0.00	0.00	90	9200	8000
10	850	1150	100	10000	10000
20	1900	2100	110	10850	11150
30	3125	2875	120	11900	12100
40	4200	3800	130	13125	12875
50	5000	5000	140	14200	13800
60	5850	6150	150	15000	15000
70	6900	7100	160	15850	16150
80	8125	7875	—	—	—

Dalla tabella si nota come i vari punti del dia-

gramma devono venire spostati positivamente o negativamente a secondo che b'_x è maggiore o minore di b_x. Il diagramma in esame quindi si trasforma nel diagramma $A' B' C' \ldots M' \ldots S'$ (fig. 117) nel quale tanto la intensità delle forze quanto lo spazio percorso sono rappresentati nelle scale costanti

$$R_o = 10 \text{ (10 kili per mm.)}$$

$$R_a = 200 \quad (s_x = 200\, b_x)$$

per cui ad esso è possibile applicare le formule note (N. 107-108) ed ottenerne i valori reali del diagramma. Avremo quindi:

1.° Applicando le note formule al diagramma $A\, B\, C \ldots M \ldots S$ fornito dall'apparecchio:

$$A = 10008$$
$$b = 160$$
$$f_m = 62.55$$
$$F_m = 625.5$$
$$L = 10008$$

2.° Applicandole al diagramma trasformato $A' B' C' \ldots M' \ldots S'$:

$$A = 9920$$
$$b = 160$$
$$f_m = 62$$
$$F_m = 620$$
$$L = 9920$$

e quindi un errore in meno.

Tale errore però è piccolo perchè abbiamo considerato un tratto di diagramma di una certa lunghezza, e quindi tale che il giunto cardanico ha dovuto eseguire un multiplo di mezzi giri.

Se consideriamo invece il tratto di diagramma compreso dalla curva $A\,B\,C\,T$, il cui tratto di diagramma trasformato è $A'B'C'T$ corrispondente ad un solo quarto di giro del giunto cardanico, avremo:

1.° Pel diagramma $A\,B\,C\,T$:

$$A = 987$$
$$b = 25$$
$$f_m = 39.5$$
$$F_m = 395$$
$$L = 987$$

2.° Pel diagramma $A'\,B'\,C'\,T$:

$$A = 887$$
$$b = 25$$
$$f_m = 35.5$$
$$F_m = 355$$
$$L = 887$$

e quindi una differenza sensibilissima.

Se consideriamo invece il tratto di diagramma corrispondente ad un $^1/_2$ giro, poichè nella 2ª parte del mezzo giro l'errore è di segno contrario a quello che si ha nella 1ª metà del mezzo giro, senza però necessariamente esserne eguale in valore assoluto, avremo una differenza di molto ridotta. Infatti:

1.° Pel diagramma $A\ B\ C \ldots F$ si ha:

$$A = 2803$$
$$b = 50$$
$$f_m = 56$$
$$F_m = 560$$
$$L = 2803$$

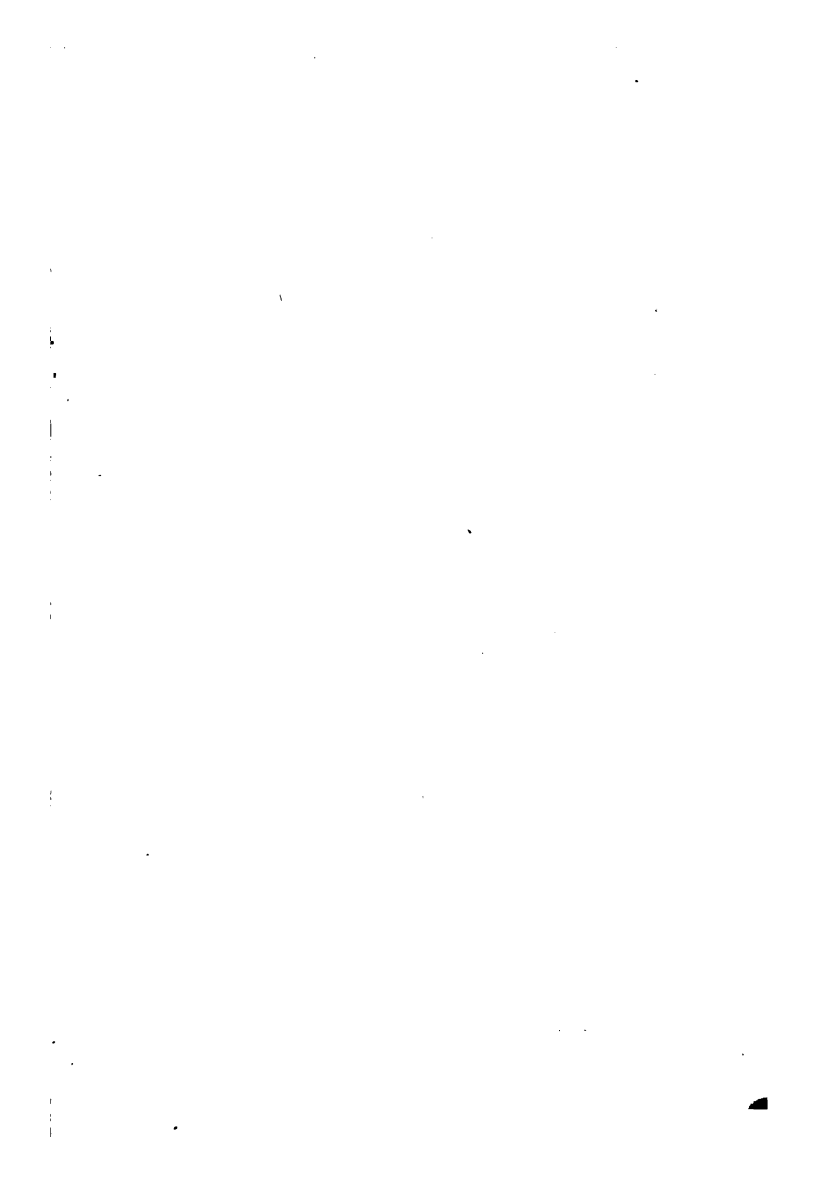
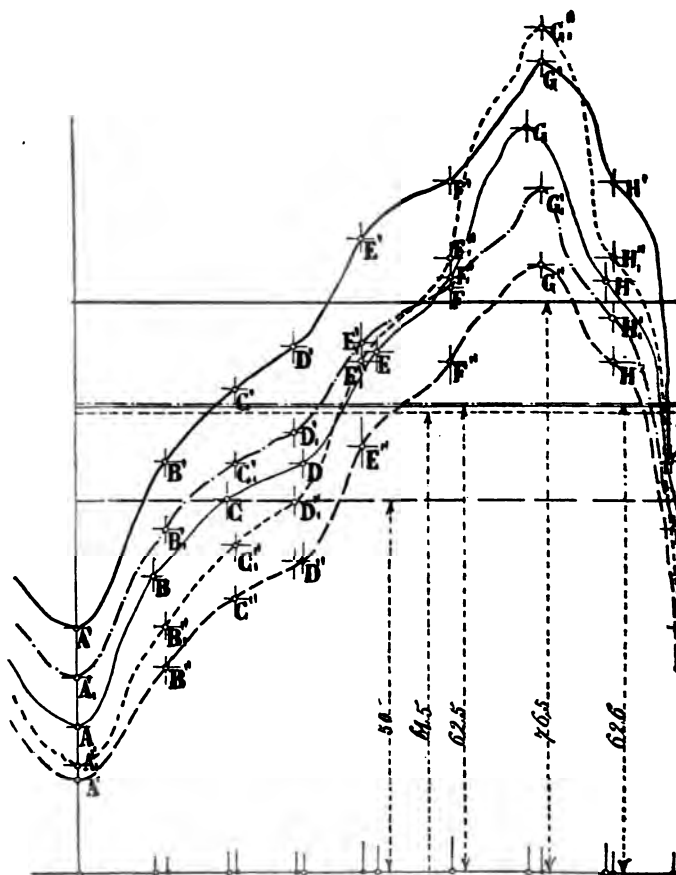
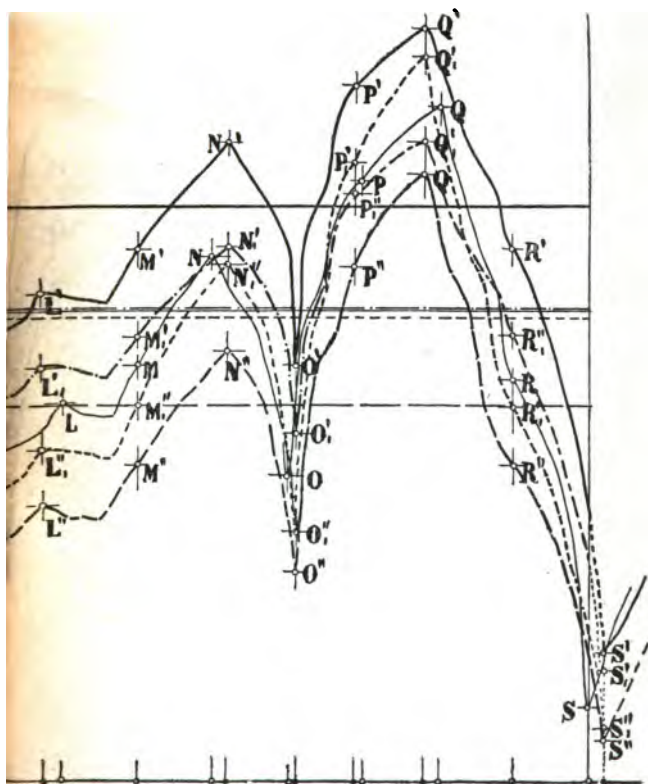
2.° Pel diagramma $A'\ B'\ C' \ldots F'$ invece:

$$A = 2772$$
$$b = 50$$
$$f_m = 55.4$$
$$F_m = 554$$
$$L = 2772$$

Ne segue che usando un giunto cardanico, affinchè l'errore minimo, oltre ad avere i due bracci di poco inclinati, è necessario che la carta si svolga in modo che il giunto compia un numero intero di mezzi giri. Con ciò non s' intende di avere errori piccoli, poichè in certe circostanze ogni singolo errore che si ha in un mezzo giro del giunto cardanico potrebbe essere costantemente dello stesso segno, e per conseguenza apportare un errore totale abbastanza sensibile.

116. *Influenza della non proporzionalità tanto fra forza e spostamento della punta registratrice, quanto fra carta svolta e spazio realmente percorso.* — Consideriamo da ultimo il caso in cui ambedue i rapporti, fra forza ed ordinata, carta svolta e spazio percorso dal punto d'applicazione della

Fig.

Q'
Q'₁
P'
Q
N'
Q'
P'₁
P
Q"
P"₁
R'
N
N'
M'
N"₁
P"
M'₁
R"₁
O'
L'₁
M
N"
R
L
M"₁
R'₁
O'₁
L"₁
M"
O
R"
L"
O"₁
O"
S'
S'₁
S
S"₁
S"

forza, non siano linearmente proporzionali, ed esaminiamo precisamente il caso in cui i detti rapporti variano secondo le leggi graficamente rappresentati dalle figure 115 e 116. I diagrammi trasformati, analogamente a quelli ottenuti precedentemente (fig. 114) nella quale si supponeva variare linearmente il rapporto fra carta svolta e spazio percorso dalla forza, si otterranno in questo caso rapidamente mediante le operazioni grafiche già eseguite.

Un punto qualunque N ad esempio (fig. 118), per effetto della curva di taratura OA (fig. 115-116) ed a seconda del rapporto lineare R_a che si considera (OB oppure OS) per avere il diagramma trasformato, fornisce i punti N', N_1', N_1'', N'' (fig. 114); in secondo luogo per effetto della curva $O\,a\,b\,c\,d\,P_x\,e\,f\,g\,S$ di taratura dello spazio, l'ordinata passante per N si sposta parallelamente a sè stessa di una quantità nota (fig. 117).

Ne segue che il punto N fornisce i quattro punti N', N_1', N_1'', N'' (fig. 118) dei quattro diagrammi trasformati ed a cui possiamo applicare le leggi note (N. 107-108). Analogamente operando sui punti della curva del diagramma considerato, avremo:

1.° Curva $A\,B\,C \ldots S$:

$$R_o = 8.4$$
$$A = 10008$$
$$b = 160$$
$$f_m = 62.55$$
$$F_m = 525.22$$
$$L = 8406.72$$

2.° Curva $A' B' C' \ldots S'$:

$$R_o = 8.4$$
$$A = 12240$$
$$b = 160$$
$$f_m = 76.5$$
$$F_m = 642.6$$
$$L = 10282$$

3.° Curva $A B C \ldots S$:

$$R_o = 12$$
$$A = 10008$$
$$b = 160$$
$$f_m = 62.55$$
$$F_m = 850.60$$
$$L = 12009.6$$

4.° Curva $A'' B'' C'' \ldots S''$:

$$R_o = 12$$
$$A = 8000$$
$$b = 160$$
$$f_m = 50$$
$$F_m = 600$$
$$L = 9600$$

5.° Curva $A_1' B_1' C_1' \ldots S_1'$:

$$R_o = 8.4$$
$$A = 10016$$
$$b = 160$$
$$f_m = 62.6$$
$$F_m = 525.8$$
$$L = 8423.4$$

6.° Curva $A_1'' B_1'', C_1'' \ldots S_1''$.

$$R_o = 12$$
$$A = 9840$$
$$b = 160$$
$$f_m = 61.5$$
$$F_m = 738$$
$$L = 11808$$

Esaminando i valori forniti da ciascuna curva, e confrontandoli con quelli forniti dalle curve analoghe della fig. 114, si vede che non sono variati di molto, poichè il diagramma comprende più di $\frac{1}{4}$ di giro del giunto cardanico. Tuttavia non essendo escluso il caso in cui la curva

$$B_0 B_{30} B_{45} \ldots B_{720}$$

di taratura dello spazio possa mantenere l'errore commesso ad ogni $\frac{1}{2}$ giro, come abbiamo già osservato precedentemente, costantemente dello stesso segno, si deve concludere che non devesi usare dinamometrografi nei quali la curva di taratura delle forze e dello spazio non siano rette.

§ 4. Determinazione del Lavoro e della Potenza con Ergometri di trazione.

117. *Ergometri semplici.* — Al N. 45 abbiamo

esaminato il meccanismo registratore degli ergometri, ed abbiamo trovato:

$$\mathcal{L} = K n''$$

$$C = K_1 \frac{n''}{t}$$

dove k_1 e k sono due costanti dipendenti dalle dimensioni dell'apparecchio stesso, ed al N. 101 abbiamo determinato il coefficente ε di correzione qualora si adoperi il valore teorico $\frac{a\,r}{m}$, anzichè il valore pratico corrispondente ottenuto coll'opeperazione di taratura.

Per gli ergometri rappresentati dalle fig. 71-72-73-74 devesi solo leggere il numero n'' di giri fornito dalla rotella conta giri, ed usare le formule sopracitate, coll'aggiunta del coefficente ε se ne è il caso, per averne il valore del lavoro eseguito dalla forza lungo un dato spazio. Avremo quindi:

$$\mathcal{L} = \varepsilon\, k_1\, n''$$

$$C = \varepsilon\, k \frac{n''}{t}$$

Nel caso che occorra conoscere il valore medio dell'intensità della forza agente, oltre ai valori n'' e t devesi conoscere il valore s, ed uguagliare il lavoro fornito dall'istrumento all'egual valore fornito dalla forma media F_m moltiplicata per s. Avremo quindi:

$$F_m s = \mathcal{L}:$$

$$F_m = \frac{\varepsilon k_1 n''}{s}$$

Se la forza agente percorre lo spazio di moto uniforme, indicando con v la velocità in metri al minuto secondo, avremo:

$$s = v t$$

$$F_m = \frac{\varepsilon k_1}{v} \frac{n''}{t}$$

nella quale formula, per $v =$ costante devesi tener conto solo di n'' e t come quantità da determinare in ogni esperienza.

118. *Ergometro Bentall.* — L'ergometro del Bentall, anzichè fornire il valore n'' proporzionale al lavoro mediante la lettura del numero di giri di una data parte dell'istrumento, ne dà una rappresentazione grafica.

Sia $A\,B\,C \ldots M \ldots S$ (fig. 119) la curva tracciata dalla punta registratrice P sulla carta avvolta attorno al tamburo T. Poichè la punta registratrice P si muove mediante la ruota R, le puleggie A e B e la vite v di moto esattamente proporzionale allo spazio, ed il tamburo T ruota di quatità linearmente proporzionali [1] all'intensità della forza, ne segue che ogni ordinata rappresenta il prodotto dello spazio percorso dall'ap-

[1] Perchè l'ergometro del Bentall è munito di due molle cilindriche.

parecchio e rappresentato da b (compreso fra il punto d'origine A e l'ordinata stessa) e della forza che ha agito fino a quell'istante. Una ordinata qualunque, quindi, rappresenta, in una data scala, il lavoro compiuto dalla forza F variabile, lungo lo spazio s rappresentato dall'ascissa b in nota scala.

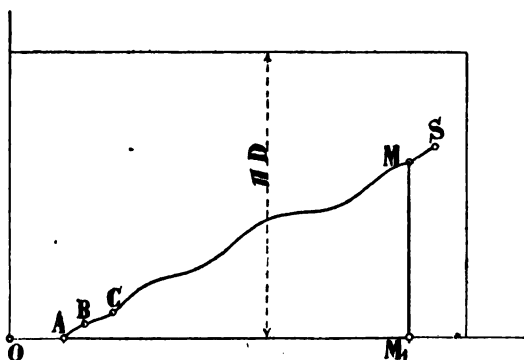



Fig. 119.

D'altra parte la ordinata MM_1 rappresenta il numero dei giri del disco D, e per conseguenza possiamo esprimere il numero n'' di giri del disco D in funzione della lunghezza dell'ordinata MM_1. Indicando con :

D — il diametro del tamburo T;

N — il numero di denti della ruota elicoidale F comandata dalla vite senza fine E che suppo-

niamo ad un filetto, e lasciando inalterate tutte le altre indicazioni di un meccanismo indicatore;

f — la lunghezza dell'ordinata $M_1 M$;

avremo:

$$\frac{n''}{f} = \frac{N}{\pi D}$$

$$n'' = f \frac{N}{\pi D}$$

$$L = \varepsilon k \frac{N}{\pi D} f = k' f \qquad C = \varepsilon k_1 \frac{1}{t} \frac{N}{\pi D} f = k_1' f$$

Cioè il lavoro compiuto dalla forza variabile F lungo lo spazio $s = R_a b$ è eguale all'ordinata f moltiplicata per un apposito coefficiente:

$$k' = \varepsilon k \frac{N}{\pi D} = \varepsilon \frac{ar}{m} \frac{N}{\pi D}$$

$$k_1' = \varepsilon k_1 \frac{1}{t} \frac{N}{\pi D} = \varepsilon \frac{ar}{75 \,.\, m} \frac{1}{t} \frac{N}{\pi D}.$$

In questo caso il coefficiente ε deve essere determinato per modo da tener conto anche della correzione dovuta alla misura del diametro D del tamburo T.

119. *Ergometri a mano e per carri.* — Nel caso dei due ergometri rappresentati dalle fig. 71-72-73-74 lo spazio percorso può essere misurato facilmente interponendo in un punto, convenientemente scelto, un contagiri. Ponendolo sull'asse che

sostiene il disco C colle indicazioni della figura, ed indicando con:

n — il numero dei giri di detto asse;

n_1 — il numero dei giri dell'asse delle ruote di diametro D e d_1;

avremo:

$$s = \pi D n_1$$

$$n_1 = n \frac{d_2}{d_1} \quad .$$

$$s = \pi D \frac{d_2}{d_1} n = k_3 n$$

dove la costante k_3 dipende dalle dimensioni delle ruote che forniscono il moto C. Esso deve poi opportunamente essere corretto con un apposito coefficente per tener conto delle inevitabili non esatte misurazioni dei diametri delle ruote, se non viene determinato praticamente, operazione che rientra nella categoria della taratura.

§ 5. **Determinazione del Lavoro e della Potenza con dinamometri semplici di rotazione.**

120. *Dinamometro semplice di rotazione. — Dinamometro di White. — Bilancia dinamometrica.* — Le formole usate per i dinamometri semplici di trazione si possono applicare anche a quelli di rotazione; tuttavia devono essere trasformate e ri-

dotte a forma pratica poichè in tali istrumenti gli elementi più facilmente misurabili sono altri.

Supponiamo di avere ottenuto il valore della forza F agente alla periferia di una circonferenza di raggio r, e necessaria per mantenere le condizioni normali del moto con una velocità di n giri al minuto primo. Avremo:

$$\mathcal{L} = F \, . \, 2 \pi r \frac{n}{60}$$

Coll'apparecchio di White e colla bilancia dinamometrica, essendo:

$$F = \frac{P m}{2 r}$$

dove P rappresenta il carico che mantiene l'equilibrio, avremo:

$$\mathcal{L} = \frac{P m}{2 r} \frac{2 \pi r n}{60}$$

Da cui:

$$C = k P m n$$

dove k assume il valore:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{716.200} .$$

Negli altri apparecchi analoghi, esprimeremo F in funzione di quantità facilmente misurabili ed useremo la prima formola trovata.

121. *Dinamometro di Harting.* — Sia noto il valore della forza F agente tangenzialmente alla ruota A di raggio R_a del dinamometro di Harting, funzionante normalmente con un numero di n giri al minuto primo. Avremo:

$$\mathcal{L} = F \frac{2 \pi R_a n}{60}$$

$$C = F \frac{2 \pi R_a n}{60 \times 75}$$

$$= \frac{1}{716.200} F R_a n \,.$$

Ponendo per F il suo valore (N. 71) in funzione della forza P segnata dal dinamometro D le formule precedenti diventano:

$$\mathcal{L} = P \frac{R_i}{R_e} \frac{R_r}{R_i + r} \frac{2 \pi R_a n}{60}$$

$$= k_1 P n$$

$$C = P \frac{R_i}{R_e} \frac{R_r}{R_i + r} \frac{R_a}{716.200} n$$

$$= k_2 P n$$

dove:

$$k_1 = \frac{R_i}{R_e} \frac{R_r}{R_i + r} \frac{2 \pi R_a}{60}$$

$$k_2 = \frac{R_i}{R_e} \frac{R_r}{R_i + r} \frac{R_a}{716.200}$$

Le due costanti, poichè $\mathcal{L}$ e C sono rappresentate dalla stessa quantità Pn devono stare fra di loro nel rapporto $\frac{1}{75}$ perchè rappresentano lo stesso lavoro. Infatti si ha:

$$\frac{\frac{R_i}{R_e} \frac{R_r}{R_i + r} \frac{2\pi R_a}{60}}{\frac{R_i}{R_e} \frac{Rr}{R_i + r} \frac{R_a}{716.200}} = \frac{1}{75}.$$

Rammentiamo che il valore di P dipende dal valore dell'intensità della forza che ha agito su di un dinamometrografo di trazione, e per conseguenza da un diagramma ortogonale o polare, da cui sappiamo già dedurne gli elementi necessari.

122. *Dinamometro dell'ing. Morosini.* — Consideriamo i dinamometri semplici di rotazione del Thomson e dell'ing. Morosini, applicati alla misura degli spazi trasmessi da un cingolo. Nota la differenza $(T - t)$ delle tensioni fra i due rami, mediante l'applicazione di un dinamometro semplice di trazione, e di un dinamometrografo, indicando con:

F_m — il valore della intensità fornita dagli apparecchi ausiliari;

R — il raggio della puleggia A del dinamometro del Thomson, o della C del dinamometro dell'ing. Morosini;

n — il numero dei giri delle stesse al minuto primo; avremo:

$$\mathcal{L} = F_m \frac{2 \pi R n}{60}$$

$$C = k F_m n$$

dove:

$$k = \frac{R}{716.200}$$

§ 6. Determinazione del Lavoro e della Potenza con dinamometrografi di rotazione.

123. *Dinamometrografo del Morin, dell'ingegnere Morosini e del Thomson.* — Consideriamo il dinamometrografo del Morin, che ci fornisce in una esperienza il valore della forza agente alla periferia delle pulegge, mediante un diagramma ortogonale. Indicando n il numero dei giri al minuto primo della puleggia motrice, di raggio R, avremo le stesse formule di dinamometri semplici del Thomson e dell'ing. Morosini; avremo cioè:

$$\mathcal{L} = F_m \frac{2 \pi R n}{60} n.$$

$$C = k F_m$$

$$k = \frac{R}{716.200}$$

Al dinamometrografo dell'ing. Morosini e del Thomson si applicano le stesse formole. La differenza fra i dinamometrografi del Morin, dell'in-

gegner Morosini e quello di Thomson consiste nell'istrumento, poichè i due primi dinamometrografi contengono in sè la disposizione che fornisce F_m senza bisogno di apparecchi ausiliari.

124. *Manovella dinamometrica.* — La manovella dinamometrica si trova in condizioni analoghe ai dinamometrografi precedenti, e quindi per esse valgono le stesse formule. È da osservare che devesi mantenere uniforme la velocità della manovella motrice per la determinazione esatta del numero n di giri da essa compiuti al minuto primo.

125. *Dinamometrografo Easton ed Anderson.* — Il dinamometrografo di Easton ed Anderson, è la riunione degli apparecchi del Morin e del Wihte resi più pratici. Le formule quindi da usare pel calcolo del lavoro eseguito da una forza, sono di due specie, essendo di due specie diverse le quantità fornite dall'apparecchio registratore.

Considerando le indicazioni fornite dal diagramma segnato sul cilindro O, indicando con F_m la forza applicata alla periferia, ottenuta come sappiamo, avremo:

$$\mathcal{L} = k\, F_m\, n$$

$$k = \frac{R}{716.200}$$

dove R è il raggio della puleggia.

Considerando invece le indicazioni fornite dall'apparecchio indicatore, noto il numero a dei Kg. necessari alla periferia della puleggia per lo spostamento di 1 mm. del cilindro guida D, il nu-

mero m dei giri della ruota C per lo spostamento di 1 metro di periferia della puleggia, il tempo t di durata dell'esperienza, ed ε il coefficente di correzione, avremo:

$$\mathcal{L} = ar \frac{n''}{m}$$

$$\underset{\bullet}{C} = \frac{ar}{75\,t} \frac{n''}{m}$$

dove n'' è fornito dal contagiri C', e precisamente dalla differenza fra le letture fatte prima e dopo la esperienza.

§ 7. **Determinazione dell'area** *A*.

126. *Generalità.* — La determinazione dell'area A, sia essa ottenuta da un diagramma ortogonale o da un diagramma polare, si può eseguire in vari modi che possiamo raggruppare in tre gruppi distinti:

1° Analitici;
2° Grafici;
3° Meccanici.

127. *Metodo analitico.* — *Formula dei trapezi.* — Dividendo l'area del diagramma in tante parti mediante ordinate passanti per i punti più salienti della curva, si ottengono delle figure geometriche che sono per approssimazione tanti trapezi.

L'area A è evidentemente la somma delle singole aree di questi trapezi; per cui indicando con:

$y_0, y_1 \ldots y_n$ i valori delle singole ordinate;

$s_1, s_2, \ldots s_n$ i valori delle distanze fra le ordinate;

avremo:

$$A = \frac{1}{2}[(y_0+y_1)s_1+(y_1+y_2)s_2+\ldots+(y_{n-1}+y_n)s_n]$$

128. *Metodo analitico. — Formula del Simpson.* — Non differisce da quella precedente se non nell'avere semplificato l'operazione considerando un numero pari n di parti eguali.

Indicando con s la distanza costante fra le singole ordinate, avremo:

$$A = \frac{s}{3}[(\varphi_0 + \varphi_n) + 4(\varphi_0 + \varphi_s + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_{n-1}) + 2(\varphi_2 + \varphi_n + \ldots + \varphi_{n-2})].$$

129. *Metodo analitico. — Formula del Crotti.* — Questa è una correzione delle formule precedenti, poichè si deve togliere una delle due espressioni:

$$\frac{s}{21}[\varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_n - \varphi_{n-1}$$

$$\frac{s}{75}[3\varphi_0 - 4\varphi_1 + \varphi_2 + 3\varphi_n - 4\varphi_{n-1} + \varphi_{n-1}]$$

a seconda della minore o maggiore approssimazione voluta.

130. *Metodo grafico. - Integrazione.* — Rappresenti la fig. 120 un tratto di curva di un diagramma di cui debbasi determinare l'area, e consideriamo

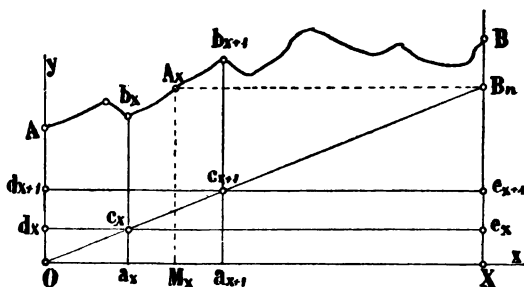



Fig. 120.

un tratto del diagramma compreso fra due ordinate qualunque $a_x\, b_x$, a_{x+1} , b_{x+1} ed un tratto di curva che s'approssimi ad una retta.

L'area di questa figurà, che con grande approssimazione possiamo ritenere un trapezio, è espressa da:

$$a_x\, a_{x+1}\, \frac{a_x\, b_x + a_{x+1}\, b_{x+1}}{2} .$$

Tale figura possiamo trasformarla in un rettangolo di base $O\,X$ ed altezza h_x tale che sia:

$$O\,X\,.\,h_x = a_x\, a_{x+1}\, \frac{a_x\, b_x + a_{x+1}\, b_{x+1}}{2} ;$$

da cui si ha:

$$h_x = a_x a_{x+1} \frac{a_x b_x + a_{x+1} b_{x+1}}{2 . OX}$$

Se indichiamo con:

m — la lunghezza di base OX;
Δ_x — la lunghezza $a_x a_{x+1}$;
y_x — l'ordinata $a_x b_x$;
y_{x+1} — l'ordinata $a_{x+1} b_{x+1}$

avremo:

$$h_x = \frac{\Delta_x}{m} \frac{y_x + y_{x+1}}{2} .$$

Ora, se di ogni area racchiusa fra due ordinate successive, l'asse delle ascisse e la curva, eseguiremo la trasformazione precedentemente indicata, ricaveremo le dimensioni di un rettangolo equivalente all'area totale del diagramma, e che ha per base una lunghezza determinata m ed un'altezza H_x somma delle singole altezze h_x.

Graficamente possiamo avere l'altezza h_x corrispondente all'area compresa fra le ordinate y_x, y_{x+1} distanti fra di loro di Δ_x, l'asse delle ascisse, ed il tratto di curva $b_x b_{x+1}$ mediante le seguenti operazioni:

1.° condurre pel punto M_x di mezzo del segmento $a_x a_{x+1}$ la ordinata $M_x A_x$ fino a tagliare il tratto di curva nel punto A_x;

2.° Condurre pel punto A_x la retta $A_x B_n$ parallela all'asse delle x fino all'incontro colla

retta parallela all'asse delle y passante per l'estremo del segmento $OX = m$;

3.° Unire il punto O col punto B_n intersecante le ordinate $a_x b_x$, $a_{x+1} b_{x+1}$ nei punti c_x, c_{x+1};

4.° Condurre per i punti c_x, c_{x+1}, le rette $d_x e_x$, $d_{x+1} e_{x+1}$ parallele all'asse delle x.

Da relazioni semplici di geometria, si ricava che il rettangolo $a_x b_x b_{x+1} a_{x+1}$ è equivalente al rettangolo $d_x d_{x+1} e_{x+1} e_x$ avente una base di lunghezza determinata m.

Scomponiamo il diagramma con tante verticali per modo che la parte di curva che è compresa fra di loro si possa considerare sensibilmente retta, ed eseguiamo per ogni parte la trasformazione suindicata. Avremo l'area del diagramma trasformata in tanti rettangoli aventi tutti la stessa base. La somma delle singole altezze di ognuno dei singoli rettangoli trasformati, anzichè eseguirla analiticamente, possiamo ottenerla in modo rapido graficamente, procedendo con ordine da una estremita all'altra della serie dei trapezi e relativi rettangoli in cui il diagramma è stato scomposto.

Infatti (fig. 121) pel rettangolo $a_1 b_1 b_2 a_2$ abbiamo le rette $A_1 B_1$, OB_1, ed il punto c_2 per cui dovrebbe passare una retta parallela all'asse delle x. Il segmento $a_2 c_2$ è precisamente l'altezza h_1 del primo rettangolo di base m e di area equivalente al trapezio $a_1 a_1 b_2 b_2$. Pel secondo rettangolo $a_2 b_2 b_3 a_3$ abbiamo analogamente le rette $A_2 B_2$, OB_2 e quindi nella distanza fra le due parallele passanti per $c'_2 c'_3$ l'altezza del rettangolo

di base *m*, ed equivalente al rettangolo considerato. Ma se per c_2 conduciamo la parallela $c_2 c_3$ alla $c'_2 c'_3$ avremo in $a_3 c_3$ la somma delle due altezze $a_2 c_2$ e $c'_2 c'_3$, cioè l'altezza di un rettangolo avente per base *m* ed equivalente all'area dei due rettangoli $a_1 b_1 b_2 a_2$, $a_2 b_2 b_3 a_3$.

Operando analogamente come sopra su tutte le parti in cui fu diviso un diagramma, avremo una curva $a_1 c_2 c_3 \ldots c_n$, che con ogni sua ordinata

Fig. 121.

determina l'altezza di un rettangolo avente una base data *m* ed equivalente all'area compresa fra la prima ordinata, la curva, l'asse delle ascisse e la ordinata considerata. Tale curva chiamasi *curva integrale*, la quale speditamente determina l'ordinata media di un dato diagramma, o di una parte di esso.

Per la esattezza dell'operazione grafica conviene dividere il diagramma in parti che si possano considerare con grande approssimazione trapezi, ma per la semplicità delle operazioni manuali conviene dividere il diagramma in parti eguali. Bisogna convenientemente scegliere il numero di parti in modo che, senza avere da eseguire molte operazioni grafiche, non si abbiano aree la cui forma sia troppo differente del trapezio.

131. *Metodo meccanico.* — *Planimetro.* — I metodi analitici e grafici sono troppo lunghi ed incomodi, per cui oggigiorno i metodi preferiti per calcolare le aree delle figure geometriche a contorno irregolare sono i meccanici.

Fra questi occupano il primo posto i planimetri, fra cui l'ortogonale o di Gonella, e.quello di Amsler. Questi sono costruiti per modo che la semplice lettura di due numeri e dalla loro differenza si ha un numero proporzionale all'area. Il planimetro polare d'Amsler è il preferito per il suo minor costo e per la sua semplicità. Occorre avere l'avvertenza di percorrere la curva nel modo più esatto possibile guidando la punta P del planimetro (fig. 122) a mano anche quando s'incontrano tratti rettilinei. In questi casi non si deve ricorrere alla guida di una squadra o di una riga, poichè uno spostamento piccolo dalla linea che deve essere percorsa dalla punta P si mantiene sempre costantemente dello stesso segno, mentre, guidando la punta colla mano, le oscillazioni inevitabili sono di segno variabile, e si elidono a vicenda rendendo minimo l'errore.

132. *Metodo meccanico. - Pesata.* — Un altro metodo meccanico, pure semplicissimo, consiste nel pesare l'area da misurarsi preventivamente tagliata con esattezza e dividere il peso ottenuto

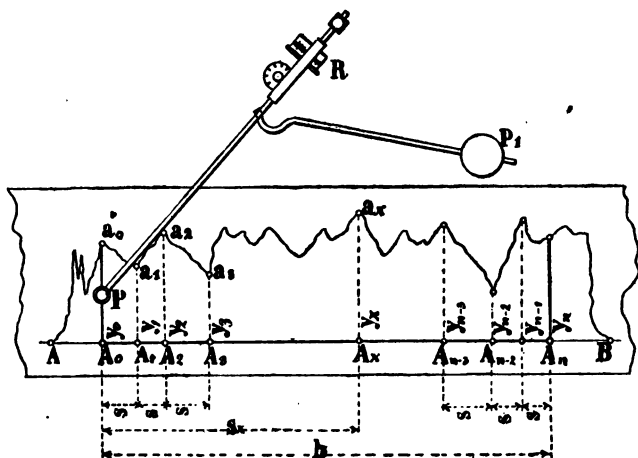



Fig. 122.

per il peso della stessa carta di dimensioni eguali all'unità di misura. Infatti, noto il peso p dell'unità di superficie della carta, il peso P dell'area da determinarsi, l'area S si ottiene semplicemente dal rapporto $\frac{P}{p}$. Si ha quindi:

$$S = \frac{P}{p}$$

Tale metodo semplice ed esattissimo nel suo principio è però poco o nulla usato per la difficoltà della sua applicazione pratica, giacchè un errore minimo nella determinazione del peso della carta determina un errore grande nel risultato finale.

§ 8. Esempi.

133. *Diagramma ortogonale.* — A suo tempo (N. 106, 107.... 115, 116) abbiamo visto a quali condizioni deve soddisfare un dinamometrografo od un ergometro perchè possa fornire con una certa esattezza le indicazioni per cui esso istrumento è stato ideato e costruito. Nei pochi esempi che ora svolgeremo, per mostrare come si possano praticamente adoperare, supporremo sempre che l'apparecchio soddisfi alle condizioni suaccennate. Daremo un solo esempio per tutti gli istrumenti analoghi o che forniscono dati con gli stessi mezzi, mentre non daremo alcun esempio se l' istrumento adoperato è un dinamometro semplice, troppo ovvia essendone la loro applicazione, quando essa sia possibile. Rammentiamo inoltre che se non sono soddisfatte le sopra citate condizioni, si dovrà usare nel calcolo del diagramma tutte quelle cure e precauzioni adoperate nella trasformazione del diagramma in un altro pel quale formule pratiche si possano applicare.

134. Consideriamo un diagramma ortogonale (fig. 123) ottenuto facendo funzionare un dinamometrografo di trazione che soddisfi alle condizioni già accennate, di avere cioè:

a) Ordinate e forze linearmente proporzionali, e precisamente nella scala teorica: $R_o = 10$;

b) Ascisse e spazio realmente percorso dal punto d'applicazione della forza pure linearmente proporzionali e precisamente secondo il rapporto teorico: $R_a = 50$.

Supponiamo inoltre che la taratura dell'apparecchio abbia fornito i seguenti coefficenti di correzione:

c) per le forze:

$$\varkappa = 1.2987;$$

d) per lo spazio:

$$\sigma = 0.9998$$

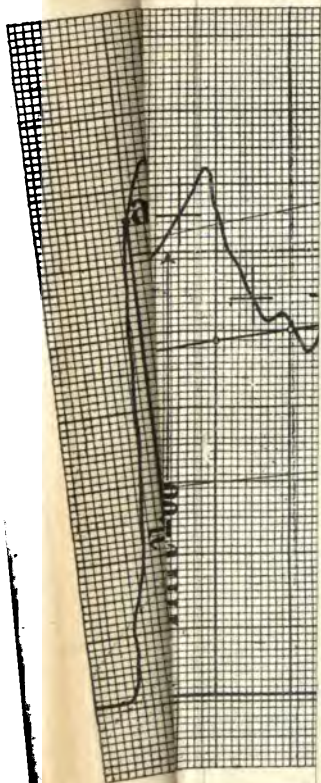
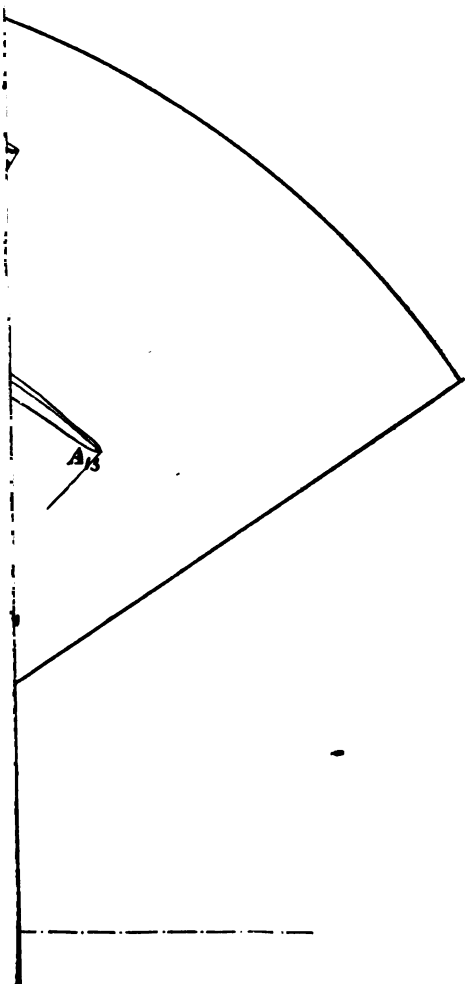
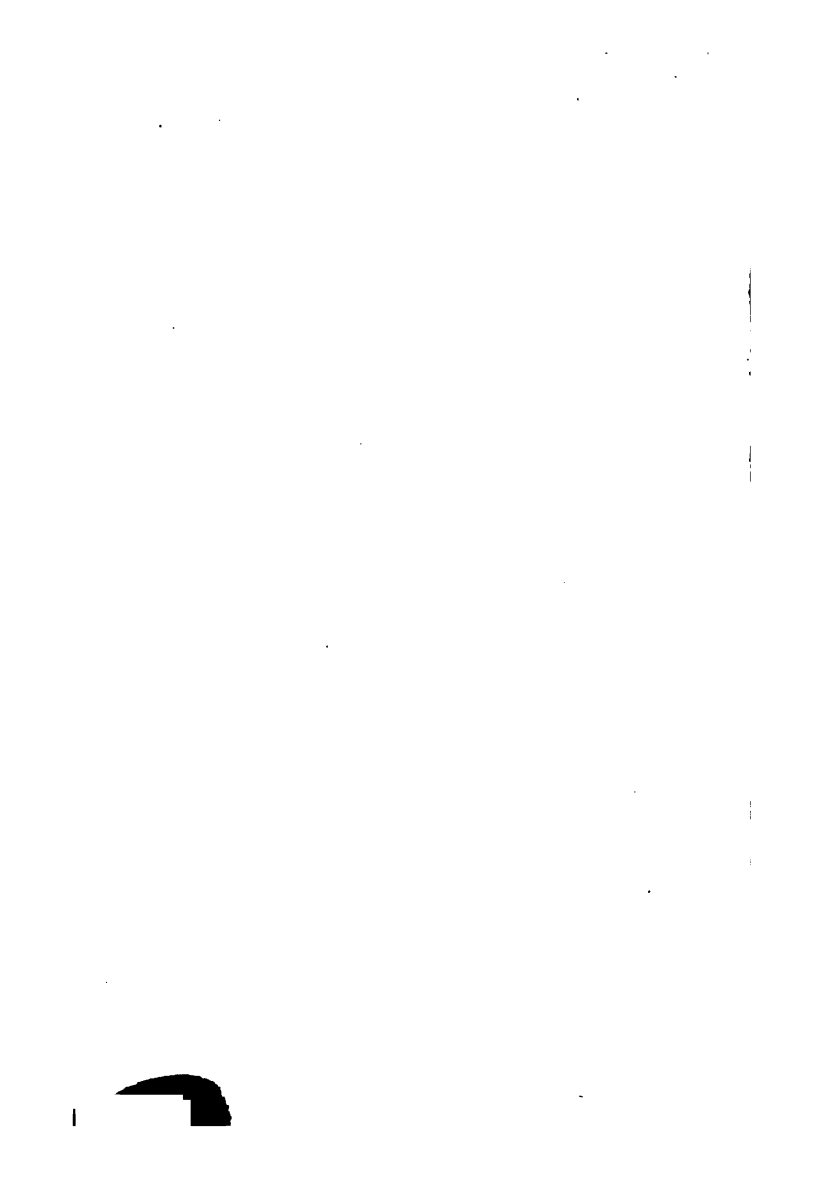
Tratteremo il caso nel modo più ampio, specialmente in riguardo alla determinazione dell'area A (area del diagramma), non considerando però il metodo per pesata perchè d'esito incerto.

Le seguenti tabelle (1°, 2°,... 5°) mostrano chiaramente l'applicazione dei vari metodi per la determinazione dell'area A del diagramma in esame (fig. 123).

1.°) **TABELLA**

per la calcolazione dell' area A *con la formula dei trapezi.*

y_x	$y_x + y_{x+1}$	$\frac{y_1 + y_{x+1}}{2}$	s	$\frac{y_x + y_{1x+}}{2} s$
$y_0 = 65.0$	—	—	—	—
$y_1 = 62.5$	127.5	63.75	10	637.5
$y_2 = 77.0$	139.5	69.75	»	697.5
$y_3 = 67.0$	144.0	72.00	»	720.0
$y_4 = 62.0$	129.0	64.50	»	645.0
$y_5 = 45.5$	107.5	53.75	»	537.5
$y_6 = 54.0$	99.5	49.75	»	497.5
$y_7 = 69.0$	123.0	61.50	»	615.0
$y_8 = 53.0$	122.0	61.00	»	610.0
$y_9 = 47.5$	100.5	50.25	»	502.5
$y_{10} = 58.0$	105.5	52.75	»	527.5
$y_{11} = 71.0$	129.0	64.50	»	645.0
$y_{12} = 77.5$	148.5	74.25	»	742.5
$y_{13} = 65.5$	143.0	71.50	»	715.0
$y_{14} = 49.5$	114.0	57.00	»	570.0
$y_{15} = 56.5$	106.0	53.55	»	530.0
$y_{16} = 37.5$	94.0	47.00	»	470.0
$y_{17} = 46.0$	83.5	51.75	»	417.5
$y_{18} = 59.0$	105.0	52.00	»	525.0
$y_{19} = 65.0$	124.0	62.00	»	620.0
$y_{20} = 65.5$	130.5	65.25	»	652.5
		A riportare		11877.5

A13

y_x	$y_x + y_{x+1}$	$\frac{y_x + y_{x+1}}{2}$	s	$\frac{y_x + y_{x+1}}{2} s$
		Riporto		11877.5
$y_{21} = 66.5$	132.0	66.00	10	660.0
$y_{22} = 63.5$	130.0	65.00	»	650.0
$y_{23} = 48.0$	111.5	55.75	»	557.5
$y_{24} = 35.0$	83.0	41.50	»	415.0
$y_{25} = 51.0$	86.0	43.00	»	430.0
$y_{26} = 57.0$	108.0	54.00	»	540.0
$y_{27} = 75.0$	132.0	66.00	»	660.0
$y_{28} = 64.0$	149.0	74.50	»	745.5
$y_{29} = 74.5$	138.5	69.75	»	697.5
$y_{30} = 65.5$	140.0	70.00	»	700.0
$y_{31} = 58.0$	123.5	61.75	»	617.5
$y_{32} = 65.6$	123.0	61.50	»	615.0
$y_{33} = 50.5$	115.5	57.75	»	577.5
$y_{34} = 63.0$	113.5	56.75	»	567.5
$y_{35} = 71.0$	134.0	67.00	»	670.0
$y_{36} = 49.0$	120.0	60.00	»	600.0
$y_{37} = 71.0$	120.0	60.00	»	600.0
$y_{38} = 62.5$	133.5	66.75	»	667.5
$y_{39} = 56.5$	119.0	59.50	»	595.0
$y_{40} = 44.0$	100.5	50.25	»	502.5
				A = 23945.5

2.°) **TABELLA**

per la calcolazione dell'area A con la formula Simpson.

y_x	$y_0 + y_n$	$y_1 + y_3 + \dots$ $\dots + y_{n-1}$	$y_2 + y_4 + \dots$ $\dots + y_{n-2}$
$y_0 = 65.0$	65.0	—	—
$y_1 = 62.5$	—	62.5	—
$y_2 = 77.0$	—	—	77.0
$y_3 = 67.0$	—	67.0	—
$y_4 = 62.0$	—	—	62.0
$y_5 = 45.5$	—	45.5	—
$y_6 = 54.0$	—	—	54.0
$y_7 = 69.0$	—	69.0	—
$y_8 = 53.0$	—	—	53.0
$y_9 = 47.5$	—	47.5	—
$y_{10} = 58.0$	—	—	58.0
$y_{11} = 71.0$	—	71.0	—
$y_{12} = 77.5$	—	—	77.5
$y_{13} = 65.5$	—	65.5	—
$y_{14} = 49.5$	—	—	49.5
$y_{15} = 56.5$	—	56.5	—
$y_{16} = 37.5$	—	—	37.5
$y_{17} = 46.0$	—	46.0	—
$y_{18} = 59.0$	—	—	59.0
$y_{19} = 65.0$	—	65.0	—
$y_{20} = 65.5$	—	—	65.5
A riportare	65.0	595.5	593.0

y_x	$y_0 + y_n$	$y_1 + y_3 + \ldots$ $\ldots + y_{n+1}$	$y_2 + y_4 + \ldots$ $\ldots + y_{n-2}$
Riporto	65.0	595.5	593.0
$y_{21} = 66.5$	—	66.5	—
$y_{22} = 63.5$	—	—	63.5
$y_{23} = 48.0$	—	48.0	—
$y_{24} = 35.0$	—	—	35.0
$y_{25} = 51.0$	—	51.0	—
$y_{26} = 57.0$	—	—	57.0
$y_{27} = 75.0$	—	75.0	—
$y_{28} = 64.0$	—	—	64.0
$y_{29} = 74.5$	—	74.5	—
$y_{30} = 65.5$	—	—	65.5
$y_{31} = 58.0$	—	58.0	—
$y_{32} = 65.0$	—	—	65.0
$y_{33} = 50.5$	—	50.5	—
$y_{34} = 63.0$	—	—	63.0
$y_{35} = 71.0$	—	71.0	—
$y_{36} = 49.0$	—	—	49.0
$y_{37} = 71.0$	—	71.0	—
$y_{38} = 61.5$	—	—	62.5
$y_{39} = 56.5$	—	56.5	—
$y_{40} = 44.0$	44.0	—	—
	109.0	1217.5	1117.5

$y_0 + y_n$ . . . . $= 109$

$y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1} = 1217.5$

$4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})$ . . . . $= 4870$

$y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2} = 1117.5$

$2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})$ . . . . $= 2235$

7214

$s = 110$

$\frac{s}{3}$ 3.333

$A = 3.333 \times 7214 = 24044.26$

3.°) **TABELLA**

per la calcolazione dell'area A con la formola Grotti.

Calcolo della correzione da apportare al valore trovato colla formola precedente.

y_x	termini +	termini —
$y_0 = 65.0$	$3y_0 = 195.0$	....
$y_1 = 62.5$	....	$4y_1 = 250.0$
$y_2 = 77.0$	$y_2 = 77.0$	....
$y_{n-2} = 62.5$	$y_{n-2} = 62.5$	....
$y_{n-1} = 56.5$	....	$4y_{n-1} = 324.0$
$y_n = 44.0$	$3y_n = 132.0$	....
	466.5	474.0

$s = 10$

$$\frac{s}{24}(466.5 - 474.0) = -3.125$$

Correzione trascurabile di fronte al valore 23945.5. Tenendone conto avremo:

$$A = 24041.14.$$

4.°) **TABELLA**

per la calcolazione dell'area A *col metodo grafico.*

Base del diagramma . . . . $b = 400$
Ordinata media . . . . $f_m = 60$
Area del diagramma . . . . $A = 24000$

5.°) **TABELLA**

per il calcolo dell'area A *col planimetro.*

Il planimetro usato è il popolare di Amsler ad asta allungabile posta alla divisione segnata con:

$$10\ m^2 .\ 1 : 1000$$
$$4\ m^2 .\ 1 : 200$$

1ª lettura del planimetro	56.58
2ª » »	32.79
Differenza	23.79

Area del diagramma A 23.79 × 1000 = 23790

6.°) *Valore medio dell'area A.*

Per il valore dell'area A assumeremo il valore medio dei singoli valori ottenuti dalle tabelle precedenti, per cui avremo:

$$A = \frac{23945,5 + 24044,26 + 24041,14}{5} +$$
$$+ \frac{24000 + 23790}{5} = 23944,5 .$$

7.°) *Determinazione della forza media e del lavoro.*

Rammentando:

$$b = 400 \text{ mm.}$$

avremo gli altri elementi:

$$f_m = \frac{A}{b} = 59.86 ;$$

$$F_m = f_m R_o k = 777,40 ;$$

$$L = \frac{1}{1000} R_o R_a k \tau A = 15604,77 .$$

135. *Diagramma polare.* — Rappresenti la figura 124 un diagramma polare, ottenuto facendo funzionare il dinamometro Kraft-Rost, e cerchiamo di determinare gli elementi analoghi a quelli determinati pel diagramma ortogonale, supponendo pure che siano soddisfatte le condizioni citate al numero 133.

Dividiamo il diagramma mediante archi di cerchio passanti per i punti caratteristici della curva cioè per quei punti che dividono la curva stessa in segmenti che si possono considerare rettilinei. In tal modo ogni singola area in cui veniamo a scomporre l'area totale, si può considerare come la differenza delle aree di due settori aventi per raggi quelli corrispondenti ai due archi estremi, e per angolo al centro la semisomma dei due angoli che comprendono i due archi stessi. Tale operazione è analoga a quella del diagramma ortogonale, trasformare i singoli trapezi in rettangoli.

Indicando con:

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ i successivi angoli formati dal raggio di base *OAB* (fig. 124) col raggio passante per ciascun punto caratteristico della curva del diagramma;

$A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ il valore dell'area di ciascun settore;

$d_0, d_1, d_2 \ldots d_n$ i diametri dei cerchi di ciascun settore;

$\varphi_{om}, \varphi_{1m}, \varphi_{2m} \ldots \varphi_{nm}$ gli angoli medi, quantità corrispondente all'altezza media di ogni singolo trapezio, rammentando che $\varphi_{om} = \varphi_0$, avremo:

$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi_{0m} = \varphi_0 \\
\varphi_{1m} = \dfrac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \\
\varphi_{2m} = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{2m} = \dfrac{\varphi_{n-1} + \varphi_n}{2}
\end{array}\right.$$

$$A_0 = \frac{\varphi_{0m}}{360} \pi \frac{d_0^2}{4}$$

$$A_1 = \frac{\varphi_{1m}}{360} \pi \left[\frac{d_1^2}{4} - \frac{d_0^2}{4}\right]$$

$$A_2 = \frac{\varphi_{2m}}{360} \pi \left[\frac{d_2^2}{4} - \frac{d_1^2}{4}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = \frac{\varphi_{nm}}{360} \pi \left[\frac{d_n^2}{4} - \frac{d^2{}_{n-1}}{4}\right];$$

e quindi la seguente tabella :

Area	φ		φ_m		d	$\frac{\varphi_m}{360}$	(**)
	gradi	primi	gradi	primi	mm.		mmq.
A_0	63°	50′	63°	50′	50.0	—	—
A_1	61	50	55	40	54.5	0,1546	57.09
A_2	63	30	67	5	63.0	0,1863	146.14
A_3	45	40	60	25	78.4	0,1678	119.19
A_4	88	10	40	17	82.0	0,1118	39.53
A_5	32	25	44	12	84.0	0,1228	45.03
A_6	48	0	63	0	99.0	0,1888	216.20
A_7	41	0	71	55	103.5	0,1998	313.11
A_8	95	50	69	55	108.0	0,1942	155.54
A_9	48	0	76	25	120.5	0,2123	466.86
A_{10}	91	50	82	17	128.5	0,2286	347.67
A_{11}	102	45	71	52	159.0	0,1996	1184.82
A_{12}	41	0	70	20	175.2	0,1953	819.67
A_{13}	99	40	77	45	188.0	0,2160	800.50
A_{14}	54	50	61	20	200.5	0,1704	640.87
A_{15}	67	50	58	25	218.5	0,1623	969.90
A_{16}	49	0	65	55	229.0	0,1823	672.87
A_{17}	82	10	76	17	234.5	0,2119	424.33
A_{18}	70	25	71	37	237.8	0,1990	250.84
A_{19}	72	50	51*	25	250.0	0,1428	804.96
						Area totale mm.	8474.82

(*) L'angolo corrispondente al raggio passante pel punto A_{20} è di gradi 30°; quindi $\frac{72^0, 50' + 30^0}{2} = 51^0, 25'$.

(**) Valori ottenuti applicando la formula:

$$\frac{\varphi_m}{360}\left[\frac{\pi d_n}{4} - \frac{\pi d_{n-1}}{4}\right].$$

Usando il planimetro, abbiamo:

1ª lettura	99.21
2ª lettura	03.06
Differenza	86.15

Area in mmq. . . . $A = 8615$.

Per valore dell'area A, assumendo la media dei due valori trovati, cioè:

$$A = \frac{8474.82 + 8615.00}{2} = 8544.91$$

e rammentando le costanti dell'apparecchio, i coefficenti di correzione, ed i valori forniti dal diagramma stesso, cioè:

$$R_a = 100$$
$$R_o = 10$$
$$k = 1.1535$$
$$\sigma = 1.0025$$
$$d_{10} = 125 \text{ mm.}$$
$$d_o = 25 \text{ mm.};$$

avremo successivamente:

$$d_{10} - d_0 = 100$$
$$s = R_a\, b = 10000 \text{ mm.} = 10 \text{ m.}$$
$$\varphi_m = 65.^\circ\, 30'$$
$$F_m = 655 \text{ Kg.}$$
$$L = 6550 \text{ Kg.}$$

136. *Ergometro di trazione.* — Siasi fatto funzionare per la durata di t secondi un ergometro di trazione le cui costanti siano:

$$k_1 = 258$$

$$k = \frac{k_1}{75} = 3.426$$

$$\varepsilon = 0,995$$

e la rotella abbia fornito:

$$n'' = 635\ ;$$

nel tempo:

$$t = 45 \text{ secondi}\ ;$$

avremo:

$$\mathcal{L} = 173060 \text{ Kg.}$$

$$C = \frac{\mathcal{L}}{75} = 51.28$$

137. *Dinamometrografo di rotazione del Morin.* — Immaginiamo applicato un dinamometrografo di rotazione, quello di Morin, ad una sega a nastro, lavorante diverse qualità di legnami. Da ultimo facciamo funzionare la sega a vuoto per potere avere il valore che dobbiamo togliere dai valori ottenuti a pieno carico, ed ottenere così i valori netti degli sforzi e dei lavori assorbiti, per unità di sezione dai diversi legnami. Avremo la seguente tabella:

ESPERIENZE	I Larice bianco	II Larice rosso	III Noce	IV a vuoto
Elementi del diagramma degli sforzi tangenziali alle puleggie dell'istrumento.				
Planimetro adoperato - Il polare di Amsler				
1ª lettura	868.0000	1413.0000	2405.0000	2716.0000
2ª lettura	723.0000	1275.0000	2247.0000	2673.0000
Differenza fra le due letture, od area A in cmq. . . . . $A=$	145.0000	138.0000	158.0000	43.0000
Lunghezza base del diagramma in cm. $b=$	94.8000	89.4000	95.0000	84.3000
Ordinata media in cm. . . . . . . $f_m=$	1.5300	1.5400	1.6600	0.5100
Valore teorico in Kg. per lo spostamento di 1 cm. di ordinata in Kg. . . . $R_o=$	15.0000	15.0000	15.0000	15.0000
Sforzo medio teorico in Kg. . . . $F_{mt}=$	22.9500	23.1000	24.9600	7.6500
Coefficiente di correzione della molla $k=$	1.1667	1.1667	1.1667	1.1667
Sforzo medio effettivo in Kg. $F_{me}=F_{mt}\,.\,k=$	26.7770	26.9500	29.0500	8.9200
Qualità e dimensioni del lavoro eseguito.				
Altezza in cm. . . . . $h=$	10.0000	10.0000	7.0000	—
Larghezza in cm. . . . . $l=$	22.7000	26.4000	33.2000	—
Sezione in cmq. . . . . $S_m=$	227.0000	264.0000	246.0000	—
Costanti dell'apparecchio ed elementi pel calcolo del lavoro.				
Diametro della puleggia in m. . . . $D=$	0.8300	0.8300	0.8300	0.8[illegible]

Lunghezza periferica della puleggia in metri . . . . $\pi D =$	2.6000	2.6000	2.6000	2.6000
Numero totale dei giri . . . . . . $n =$	152.0000	144.0000	144.0000	132.0000
Durata dell'esperienza in secondi . $t =$	60.0000	120.0000	120.0000	60.0000
Giri al minuto secondo . . . $n'' = \frac{n}{t} =$	2.5330	2.4000	2.4000	2.2000
Spazio percorso in un secondo $s'' = \pi D n'' =$	6.5780	6.2400	6.2400	5.7200
Spazio percorso in t secondi $s = \pi D n =$	394.6800	374.4000	748.8000	343.2000
Lavoro totale assorbito.				
Lavoro in Kgm. assorbito in un secondo $\mathfrak{L} =$	176.1390	168.1680	181.2780	50.8510
» » » in t secondi $L =$	10568.346	10090.080	21753.360	3051.0600
» in cavalli . . . . . . $C = \frac{\mathfrak{L}}{75} =$	2.3480	2.2410	2.4170	0.6780
Lavoro netto assorbito.				
Sforzo medio effettivo in Kg. . $F_{me} =$	17.8520	18.0250	20.1260	—
Lavoro in Kg. in t secondi . . . $L =$	692.7500	674.8500	1508.000	—
» » in un secondo $\mathfrak{L} = \frac{L}{t} =$	115.5600	112.4760	125.5780	—
» in cavalli . . . . . . $C = \frac{\mathfrak{L}}{75} =$	1.5510	1.5400	1.6740	—
Sforzo unitario per cmq. di sezione $F_u =$	0.0780	0.0680	0.0820	—
Lavoro unitario in Kg. al min. secondo $\mathfrak{L}_u =$	0.5140	0.4250	0.6110	—
Lavoro unitario in cavalli . . . . $C_u =$	0.0070	0.0060	0.0080	—

Parte Quinta

NOTA

Contatore cronografico — Tachimetro
Dinamometro d'inerzia.

138. *Generalità.* — Gli istrumenti fin qui esaminati servono alla determinazione delle forze agenti su di un sistema in moto, servono cioè alla determinazione dello stato dinamico di un sistema materiale, coll' interposizione dell' istrumento stesso lungo la traiettoria. Tuttavia prendendo in esame un caso generico, rammentando le formole fondamentali della meccanica, e precisamente

$$F = M\,a = M\frac{v}{t}$$

$$s = f(t)$$

$$v = \varphi(t) = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \varphi(t) = \frac{d^2\,s}{dt^2}$$

$$s = \int \varphi(t)_{dt} + C$$

$$v = \int \psi(t)_{dt} + C$$

$$s = \int dt \int \psi(t)\,dt + \int \varphi(t)\,dt + C$$

Si comprende facilmente come lo stato dinamico di un sistema materiale in movimento sia determinato quando si conosca una delle tre seguenti leggi:

1° Spazio in funzione del tempo;
2° Velocità in funzione del tempo;
3° Accelerazione in funzione del tempo;

La misura dell'accelerazione è quella che conduce alla immediata conoscenza della forza motrice agente su di un sistema e del lavoro che essa compie lungo una determinata traiettoria; ma essendo possibile trovare in qualche caso più conveniente la determinazione di una delle altre due leggi, esamineremo partitamente e per sommi capi le tre leggi e gli istrumenti che servono allo scopo.

139. *Determinazione dello spazio in funzione del tempo. - Orologio.* — Un semplice orologio e la misura diretta sono gli istrumenti che bastano allo scopo. Ma risulta chiaro che un operatore solo non può eseguire simultaneamente le letture necessarie, per cui conviene ricorrere al *contatore cronografico.*

Contatore cronografico. — Esso è fondato sul fatto di segnare sul quadrante l'istante preciso di una osservazione, mediante una piccola goccia di inchiostro grasso che trovasi all'estremità della sfera indicatrice, ed azionata dall'esterno del contatore a mezzo di un piccolo bottone.

In generale il diametro del contatore cronografico è variabile, ma per quelli più in uso è di 60 mm. con l' intervallo del minuto secondo sud-

diviso in 5 parti eguali. In queste condizioni si possono eseguire letture con differenze di $^1/_{20}$ di

Treno viaggiatori. Variazioni della resistenza per tonnellata alle differenti velocità per differenti carichi trainati.

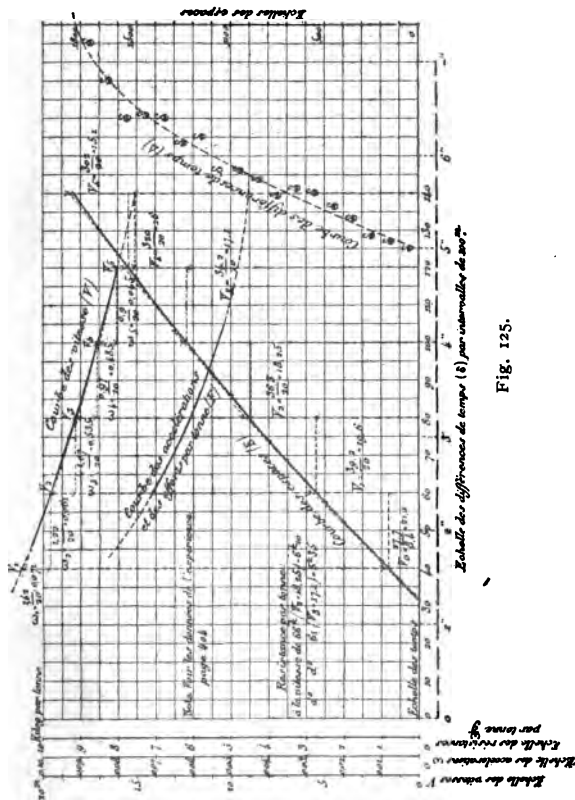



Fig. 125.

secondo. Il contatore cronografico permette quindi

di eseguire un gran numero di letture comprese in tempuscoli assai brevi, corrispondenti, ad esempio, a determinate posizioni di un corpo in movimento lungo una data traiettoria.

Curva di correzione. — Nel caso di un treno viaggiante e lungo la via sian determinate le successive posizioni distanti egualmente fra di loro di *a* metri, il contatore cronografico determina esattamente la legge del tempo in funzione dello spazio, e viceversa. Ottenuto le due serie dei tempi e degli spazi, è bene averne una rappresentazione grafica, per eliminare quei termini delle serie che accidentalmente fossero errati, mediante l'uso di un appropriato curvilineo.

La seguente tabella registra N. 18 osservazioni eseguite durante il movimento di un treno, e le due ultime colonne segnano i termini delle serie dei tempi corretti mediante l'uso del curvilineo; la fig. 125 rappresenta graficamente le osservazioni registrate nella tabella.

Treno composto di { 1 Macchina a G. V. e suo tender $50^{t}.0$
8 Veicoli . . . . $85^{t}.0$ }

Pendenza $0^{mm}.5$

Vento posteriore debole

Regolatore chiuso

Numero osservazioni	Spazi percorsi	Tempi osservati	Differenza dei tempi	Tempi corretti	Differenza dei tempi corretti
0	0.0	31.60		31.60	
			5.00		5.040
1	100.0	36.60		36.64	
			5.05		5.120
2	200.0	41.65		41.76	
			5.05		5.200
3	300.0	46.50		46.96	
			4.85		5.280
4	400.0	52.10		52.24	
			5.60		5.370
5	500.0	57.60		57.64	
			5.50		5.460
6	600.0	63.20		63.07	
			5.60		5.550
7	700.0	69.00		68.62	
			5.80		5.650
8	800.0	74.40		74.27	
			5.75		5.750
9	900.0	80.15		80.02	
			5.85		5.845
10	1000.0	86.90		85.86	
			5.80		5.945
11	1100.0	91.80		91.81	
			6.20		6.060
12	1200.0	98.00		97.87	
			5.90		6.150
13	1300.0	103.90		104.04	
			6.65		6.300
14	1400.0	110.55		110.34	
			6.45		6.450
15	1500.0	117.00		116.79	
			6.40		6.610
16	1600.0	123.40		123.40	
			6.80		6.810
17	1700.0	130.30		130.21	
			7.20		7.080
18	1800.0	137.40		137.29	

Dalla legge ottenuta eseguendo analiticamente o graficamente due differenziazioni sappiamo che si ottiene l'accelerazione e per conseguenza la forza F che ha agito a far superare nel tempo t lo spazio s al sistema materiale in movimento.

Avremo dunque:

$$s = f(t)$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$F = M a$$

dove M è la massa di tutto il treno.

140. *Determinazione della legge della velocità in funzione del tempo.* — La misura della velocità in qualunque sistema in moto si ottiene per ogni istante dal quoziente $\frac{s}{t}$ dello spazio percorso e del tempo impiegato a percorrerlo, cioè dalla legge precedente. Tuttavia quando è possibile conviene disporre il sistema in modo che un suo albero qualunque ruoti di moto linearmente proporzionale allo spazio percorso, per adoperare degli apparecchi speciali che forniscono per ogni istante, in una data scala il rapporto $v = \frac{s}{t}$.

Tali apparecchi possono essere di due specie; a forza centrifuga come i regolatori delle macchine a vapore, oppure a forma di manometro. I primi presentano l'inconveniente di una scala decrescente, la quale a grandi velocità, e precisamente quando maggiore deve essere la preci-

sione, forniscono oscillazioni troppo piccole. I secondi soddisfano molto più al caso; tuttavia la loro gradazione empirica, deve essere controllata spesso.

Nel caso di una macchina motrice trasmettente la forza alla periferia di una puleggia o di una ruota, l'applicazione di uno qualunque di detti apparecchi si presenta facile, mediante una trasmissione sia a cinghie che a ruote dentate o con un sistema misto. Nel caso invece di un corpo in moto lungo una traiettoria qualunque, occorre poter disporre di un mezzo che sviluppandosi lungo la traiettoria stessa, trasformi in rotatorio il moto di traslazione.

In questo caso occorre che nessuna causa alteri la trasformazione linearmente proporzionale dei due movimenti.

141. *Tachimetro idrostatico.* — L'apparecchio che si presta meglio d'ogni altro per la misura della velocità è il tachimetro idrostatico, un tipo del quale è rappresentato dalla fig. 126. La superficie di livello del liquido, sotto la forza centrifuga si deforma, abbassandosi in corrispondenza dell' asse di rotazione, ed innalzandosi lungo le pareti del vaso, assumendo una forma di un solido di rivoluzione. Il galleggiante che trovasi in corrispondenza dell'asse, segue l'abbassamento del liquido, spostando un

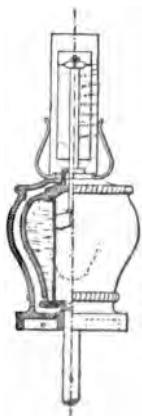



Fig. 126.

indice lungo una striscia metallica graduata disposta superiormente al vaso. La sua applicazione occorre determinarla caso per caso, e la fig. 127 ne mostra uno relativo ad una motrice funzionante normalmente a giri 200 ÷ 300.

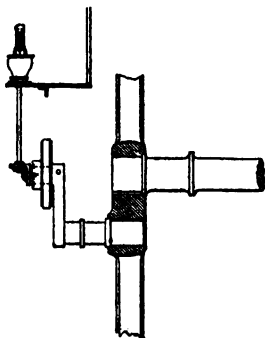



Fig. 127.

Per macchine rapidissime occorre l'aggiunta di un appropriato riduttore di velocità.

L'esperienza ha mostrato che quest'istrumento funziona bene pur essendo di una estrema semplicità.

La scala, il cui zero corrisponde al liquido orizzontale, è una funzione della generatrice del vaso; sarà bene determinarla per modo che le velocità stiano in un rapporto linearmente proporzionale, quando si voglia rendere l' istrumento registratore. La rappresentazione grafica della serie delle velocità e corri-

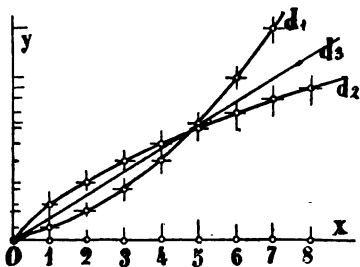



Fig. 128.

spondenti spostamenti lungo le scale dovranno fornire in un diagramma ortogonale una retta, come la $O\,d_3$ (fig. 128) e non delle curve come le $O\,d_1$ ed $O\,d_2$. Il movimento della carta poi deve avvenire a mezzo di un movimento d'orologeria.

142. *Volante dinamometrico.* — Una applicazione immediata del tachimetro si ha nel volante dinamometrico, basato sulla determinazione della forza viva o dell'accelerazione che una data massa (volante), di cui si conosce il momento d'inerzia, acquista nel passaggio da una velocità iniziale Vo ad una finale V_1, poste ad egual distanza della velocità media Vm della macchina a regime. Il metodo di misura della forza di una macchina col volante dinamometrico equivale a quello del freno di Prony, se intendiamo sostituito al lavoro d'inerzia del volante l'attrito di sfregamento del freno.

Consideriamo una macchina di x cavalli vapore, alla velocità normale di N_n giri al minuto primo. Si abbassi la velocità fino a N_o giri, ad esempio, chiudendo la valvola d'ingresso del vapore, poi si rimetta al normale, togliendo tutte le resistenze e lasciando il motore collegato col solo volante dinamometrico. Quando la velocità ha raggiunto il valore di N_1 giri, indicando dove N_1 dista da X quanto N_n dista N_o; se indichiamo con:

T — il tempo impiegato perchè la velocità passi da N_0 a N_1 giri al minuto primo;

V_0 — la velocità iniziale eguale ad N_0 giri al minuto primo;

V_1 — la velocità finale eguale ad N_1 giri al minuto primo;

P — il peso del volante dinamometrico;
f — il momento d'inerzia dell'apparecchio;
α — il rapporto di moltiplicazione delle velocità; per il principio delle forze vive avremo:

$$75 \, . \, x \, . \, T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} f^2 \left(\frac{V_1^2}{60^2} - \frac{V_0^2}{60^2} \right) 4 \pi^2 \alpha^2 \, .$$

Misurato, T, V_0, V_1 dall'equazione possiamo ricavare il valore di x.

143. *Determinazione della legge dell'accelerazione in funzione del tempo. — Accelerazione e forza.* — Se consideriamo un sistema qualunque in movimento, ad ogni suo elemento possiamo applicare l'equazione d'Alembert, e ne avremo determinato lo stato dinamico allorchè conosceremo a mezzo dell'equazione stessa le forze d'inerzia.

Per non uscire dal campo pratico ammettiamo che il moto sia una traslazione in un piano od una rotazione secondo un grandissimo raggio di curvatura. In tal caso basterà considerare l'equilibrio di un solo elemento di massa per determinare lo stato dinamico del sistema in moto. L'equazione d'equilibrio, determinata in direzione e grandezza le resistenze dei legami, noto il peso della massa elementare m, ci fornisce l'accelerazione della massa stessa m, che misura l'azione della risultante delle forze esterne.

144. *Pendolo dinamometrico.* — Esso è la forma più semplice che corrisponda alle condizioni teoriche precedenti. La massa elementare (fig. 129)

sospesa ad un punto O, sotto l'azione positiva o negativa dell'accelerazione a del sistema, assume una posizione che si sposta dalla verticale di un certo angolo α. In tali condizioni, indicando con g l'accelerazione dovuta alla gravità, avremo:

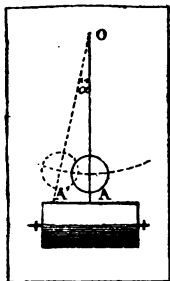



Fig. 129.

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{a}{g}.$$

Se ora, sotto alla massa m disponiamo una striscia di carta, che si muova proporzionalmente al tempo, avremo una curva di cui ogni ordinata è la rappresentazione dell'accelerazione in ogni istante ed in una data scala. Dalle figure ricaviamo, indicando con l la lunghezza del pendolo, y lo spostamento della massa cioè l'ordinata del diagramma:

$$A\,A' = y = OA\,\text{tang}\,\alpha$$

$$= \frac{O\,A}{g}\,\alpha\,;$$

$$y = \frac{l}{g}\,a\,;$$

e quindi:

$$a = \frac{g}{l}\,y.$$

Noto l'accelerazione, avremo la forza totale ap-

plicata al sistema mediante la formula data in principio alla nota, cioè:

$$F = M a = \frac{M g}{l} y.$$

Il diagramma, quindi, fornito dal pendolo dinamometrico, quando la carta è mossa da un cronometro, rappresenta la legge con cui varia l'accelerazione nella scala $\frac{l}{g}$, e la forza nella scala $\frac{l}{Mg}$ applicate al sistema. Rammentando le formole principali sopra citate con due integrazioni successive avremo la curva delle velocità e la curva degli spazi; avremo cioè:

$$a = \frac{d v}{dt}$$

$$v - v_0 = \int_{vo}^{v} dv = \int_{vo}^{v} \frac{d v}{dt} dt$$

$$s - s_0 = \int_{so}^{s} ds = \int_{so}^{s} v\, dt$$

Il pendolo dinamometrico quindi rappresenta un apparecchio di applicazione generale, avendo l'avvertenza di usarlo solo in quei casi in cui la scala del diagramma non assuma valori troppo grandi.

145. *Pendolo dinamometrico - Forma differenziale.* — Esso è la riunione di due pendoli semplici, di cui uno stabile ed uno instabile. L'asta che li riunisce descrive col suo punto di mezzo

una curva ad ∞, che per oscillazioni piccole in posizioni determinate possiamo ritenere una retta, parallelamente alla quale si può disporre la striscia di carta su cui ottenere il diagramma (fig. 130).

146. *Pendolo dinamometrico - Forma cilindrica.* — Il risultato che si ha con la forma differen-

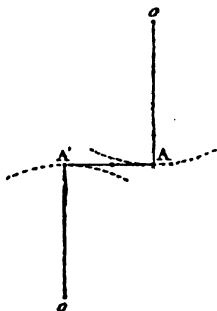
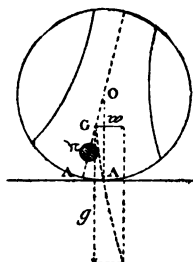



Fig. 130. Fig. 131.

ziale, si ottiene in modo semplice adottando un disco O (fig. 131) che rotoli su di un piano orizzontale. Di tal disco si conserva solamente una parte in modo che il baricentro della sua massa si trovi più in basso del centro di rotazione e renda stabile l'apparecchio. Un contrappeso π serve a spostare in altezza il centro di gravità di quanto occorre.

Indicando con:

R — il raggio della circonferenza rotolante;

d — la distanza del centro di gravità dal centro

di figura, determinato, oltre che dalla parte di cilindro adoperate, anche dal contrappeso aggiunto;

α — l'angolo di cui si è inclinato la retta passante per il centro di figura e pel centro di gravità;

a — l'accelerazione che la forza motrice imprime alla massa dell'istrumento;

g — l'accelerazione della gravità.

Avremo:

$$g\, d \operatorname{sen} \alpha = a\,(r - d \cos \alpha)$$

$$a = \frac{g\, d \operatorname{sen} \alpha}{r - d \cos \alpha}$$

$$y = r\,\alpha$$

$$\frac{a}{y} = \frac{g\, d \operatorname{sen} \alpha}{r\,(r - d \cos \alpha)\,\alpha}.$$

Per un grande raggio di curvatura e per piccoli valori di α, avremo:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$$

$$\cos \alpha = 1$$

$$\frac{a}{y} = \frac{g\, d}{r\,(r - d)}$$

$$a = y\,\frac{g\, d}{r\,(r - d)}.$$

Si osservi che non è necessario conoscere la

distanza d per la determinazione della scala di misura della accelerazione a in funzione dell'ordinata y del diagramma, ma si può determinarla praticamente. Spostiamo dell'angolo δ la massa rotolante, misuriamo la corrispondente ordinata, che indichiamo con y_1, avremo:

$$\frac{g\,\delta}{y_1} = \frac{g\,d}{r\,(r-d)}\,;$$

e quindi:

$$y = \frac{y_1}{g\,\delta}\,a\,.$$

L'accelerazione è quindi misurata in ogni istante dall'ordinata y del diagramma nella scala $\frac{y_1}{g\,\delta}$ determinata sperimentalmente.

La sensibilità di tale apparecchio, essendo possibile spostare il contrappeso aggiunto, fino a far coincidere il centro di gravità col centro di rotazione, si può rendere grande finchè si vuole, se non si dovesse tener conto delle resistenze passive di attrito. L'attrito di rotolamento fra settore e guida inferiore, si rende minimo adoperando settore e guida di acciaio temperato e levigato. L'attrito della matita, anzichè ricorrere a mezzi complicatissimi, si rende minimo, e quasi nullo, dando artificialmente (se non avvengono già naturalmente) delle vibrazioni periodiche di piccole ampiezze all'istrumento; a tale scopo esso è munito di tre punti d'appoggio, di cui uno col-

l'intermezzo di una molla. In un treno in marcia le giunture stesse delle rotaie forniscono il moto vibratorio necessario per ottenere quanto s'è detto sopra; in un moto calmo, invece, occorrerà provvedere artificialmente per avere le vibrazioni necessarie.

Nel considerare l'azione del pendolo dinamometrico e nel rammentare il tempo di durata

$$t = \pi \sqrt{\frac{\mu^2}{g\, d}}$$

di una oscillazione semplice, si osserva che si deve considerare l'istrumento sotto due punti opposti riguardo al genere degli sforzi da misurare. Se questi sono continui, o che la variazione sia continua, il tempo t influisce per nulla sulle registrazioni, per cui è bene dare all'apparecchio il massimo di sensibilità, cioè rendere minimo d. Se invece le variazioni avvengono rapidamente, come il chiudersi di un freno, etc., allora non si può trascurare il tempo, ma occorre rendere minimo il momento d' inerzia perchè il pendolo possa seguire il fenomeno senza perdere tempo. In tal caso l'apparecchio si riduce ad un semplice settore di raggio grande e leggerissimo.

Nel caso poi che si dovesse aumentare il momento d'inerzia, e non si volesse il corrispondente aumento di peso, si potrà ottenere lo stesso effetto con un freno a liquido riunito al settore mediante una leggerissima biella.

Il tipo rappresentato dalla fig. 132 è formato di due settori in acciaio temperato oscillanti, su rotaie dello stesso metallo, e col centro di gravità ravvicinato al centro di figura per fornirlo di una grande sensibilità, centro che si può spostare a

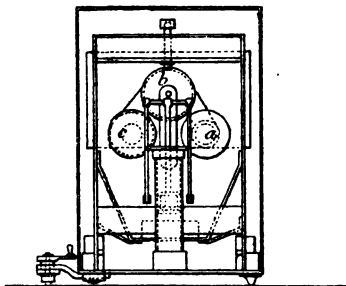



Fig. 132.

mezzo di pesi addizionali, per variarne la sensibilità stessa. La carta che si svolge dal rullo *a*, su cui è immagazzinata, s'arrotola sul rullo *c* mossa da una molla, dopo essere passata sul rullo *b* a superficie scabra.

Tale rullo è comandato da un cronometro con scappamento di $^1/_5$ di 1″ e la disposizione è tale che si possa avere:

1° uno sviluppo di carta di 2 mm. per ogni secondo per i movimenti rapidi:

2° uno sviluppo di 5 mm. per ogni minuto primo per i movimenti lenti.